

K-Theorie bezüglich Reeller von Neumann'schen Algebren

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der Philipps-Universität

Marburg/Lahn

vorgelegt von

Wolfgang Schreiber

aus Berleburg

Marburg/Lahn 1977

K-Theorie bezüglich Reeller von Neumann'schen Algebren

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der Philipps-Universität

Marburg/Lahn

vorgelegt von

Wolfgang Schreiber

aus Berleburg

Marburg/Lahn 1977



Dissertation angenommen am : 19.7.1977

Tag der mündlichen Prüfung : 1.8.1977

Berichterstatter : Prof.Dr. Breuer

Mitberichterstatter : Prof.Dr. Gromes

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Kapitel I	Reelle W^* -Algebren	
§ 0	Über die Komplexifizierung einer reellen von Neumann'schen Algebra	2
§ 1	Reelle W^* -Algebren	7
§ 2	Strikt rein Reelle W^* -Algebren	21
§ 3	Über die Lage von Projektionen	45
Kapitel II	Vektorbündel mit Strukturgruppe in von Neumann'schen Algebren.	
§ 1	Definition von reellen, komplexen und Reellen $\mathcal{M}$ -Vektorbündeln und ihren Morphismen; das Graßmannvektorbündel	7
§ 2	Reelle $\mathcal{M}_\phi$ -Vektorbündel	67
§ 3	Kohomologietheorie für Reelle $\mathcal{M}_\phi$ -Vektorbündel	79
§ 4	Der Satz von Atiyah - Jänich	89
Kapitel III	Der Periodizitätssatz	
§ 1	Der Periodizitätssatz für Reelle $\mathcal{M}_\phi$ -Vektorbündel	98
§ 2	Der Periodizitätssatz für reelle $\mathcal{M}$ -Vektorbündel	122



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

1973 definierte Breuer in [9] $\mathcal{M}$ -Vektorbündel als Faserbündel, deren Strukturgruppe Werte in einer vorgeschriebenen komplexen von Neumann'schen Algebra annimmt. Die vorliegende Arbeit entstand aus dem Bemühen, die dort erzielten Ergebnisse auf $\mathcal{M}$ -Vektorbündel zu übertragen, wobei $\mathcal{M}$ nun allerdings eine reelle von Neumann'sche Algebra ist. Da die Komplexifizierung $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ einer reellen von Neumann'schen Algebra stets eine komplexe von Neumann'sche Algebra ist, bedienen wir uns durchgehend der Methode der Komplexifizierung, was auch durch die Arbeit von Atiyah [4] nahegelegt wird.

Zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ definieren wir in Kapitel I den etwas allgemeineren Begriff der Reellen W^* -Algebra. Insbesondere brauchen die Typen von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ im Allgemeinen nicht übereinzustimmen. Es zeigt sich aber, daß sie vom gleichen Typ sind, wenn $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ eine spezielle Eigenschaft besitzt.

In Kapitel II entwickeln wir analog zu Breuer in [9] eine Theorie der Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel. Dabei definieren wir in Anlehnung an Atiyah [4] ein Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel als ein $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel, dessen Basisraum und Totalraum Z_2 -Räume sind. Im Unterschied zur equivarianten Theorie [27] operiert Z_2 in unserem Fall auf dem Totalraum jedoch antilinear. Falls der Basisraum X ein trivialer Z_2 -Raum ist, so tritt jedes Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über X als Komplexifizierung eines reellen $\mathcal{M}$ -Vektorbündels auf. Es erscheint deshalb im Hinblick auf Kapitel I sinnvoll Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel zu betrachten.

Schließlich beweisen wir in Kapitel III den Periodizitätssatz für die Reelle $KR_{\mathbb{M}_q}$ -Theorie. Der Beweis hierfür ist dem von Breuer in [9] gegebenen ähnlich. Dieser Periodizitätssatz induziert nach Atiyah [4] den Periodizitätssatz für eine reelle $KO_{\mathbb{M}}$ -Theorie.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Breuer für die Anregung zu dieser Arbeit und seine ständige Unterstützung. Ferner danke ich Herrn Dr. Brüning für seine hilfreichen Gespräche.

Kapitel I

Reelle W^* -Algebren.

In diesem Kapitel betrachten wir komplexe W^* -Algebren $\mathcal{M}$ für die ein involutorischer antilinearer Automorphismus $\bar{\cdot} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ gegeben ist. Solche W^* -Algebren nennen wir kurz Reell. Da insbesondere die Komplexifizierung einer reellen von Neumann'schen Algebra eine Reelle W^* -Algebra ist, sollen in einem vorbereitenden § 0 die wichtigsten Eigenschaften einer solchen Komplexifizierung zusammengestellt werden. Satz 1.0.3 liefert dann die Motivation für die Definition einer Reellen W^* -Algebra.

In § 1 wird gezeigt, daß die Fixpunktalgebra $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathcal{M} \mid \bar{x} = x\}$ einer Reellen W^* -Algebra ein reelles Prädual besitzt. Daraus folgt dann sofort, daß jede reelle von Neumann'sche Algebra ein Prädual hat.

Für eine Projektion $p \in \mathcal{M}$ ist es im Allgemeinen nicht richtig, daß $p \sim \bar{p}$ ist. W^* -Algebren, für die stets $p \sim \bar{p}$, gilt, nennen wir rein Reell. Eine Unterklasse hiervon sind die strikt rein Reellen W^* -Algebren. Für eine strikt rein Reelle W^* -Algebra $\mathcal{M}$ zeigen wir, daß der Typ von $\mathcal{M}$ vollständig durch den Typ der Fixpunktalgebra $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ bestimmt ist. Mit den hiermit zusammenhängenden Fragen beschäftigen wir uns in § 2.

In § 3 untersuchen wir, wie die Graßmann'sche von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ in der Graßmann'schen von $\mathcal{M}$ liegt. Als Ergebnis erhalten wir, daß es zu jeder Projektion $q \in \mathcal{M}$ eine Projektion $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $\|q - g\| < 1$ gibt, sofern nur $\mathcal{M}$ strikt rein Reell ist.

§ 0 Über die Komplexifizierung einer reellen von Neumann'schen Algebra.

Seien $\mathcal{H}$ ein reeller oder komplexer Hilbertraum, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ die Menge der stetigen linearen Operatoren von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$. Ist $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so bezeichnen wir mit S^* die Adjungierte von S . Eine Unteralgebra $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nennen wir involutiv, wenn mit $S \in \mathcal{M}$ auch $S^* \in \mathcal{M}$ ist. Mit $\mathcal{M}'$ bezeichnen wir die Menge der Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, die mit allen Elementen aus $\mathcal{M}$ vertauschbar sind. $\mathcal{M}'$ heißt der Kommutant von $\mathcal{M}$. Wir setzen $(\mathcal{M}')' =: \mathcal{M}''$ und nennen $\mathcal{M}''$ den Bikommutanten von $\mathcal{M}$. Es ist stets $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$.

Def. 1.0.1 Eine involutive Unteralgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ für die $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ ist, nennen wir eine von Neumann'sche Algebra.

Im Folgenden sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum. $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ aus Def. 1.0.1 ist dann eine reelle von Neumann'sche Algebra.

Es ist bekannt (22, XVI, §3, 18, §16), daß sich jedem reellen Vektorraum X ein komplexer Vektorraum $X_{\mathbb{C}}$ und jeder reellen Algebra $\mathcal{A}$ eine komplexe Algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ zuordnen läßt. Ein beliebiges Element aus $X_{\mathbb{C}}$ ist eine Summe $x \otimes 1 + iy \otimes 1$, wobei $x, y \in X$ ist. Die Multiplikation von zwei Elementen $S_1 \otimes 1 + iT_1 \otimes 1$ und $S_2 \otimes 1 + iT_2 \otimes 1$ ist durch

$$(S_1 \otimes 1 + iT_1 \otimes 1)(S_2 \otimes 1 + iT_2 \otimes 1) := \\ (S_1 S_2 - T_1 T_2) \otimes 1 + i(S_1 T_2 + T_1 S_2) \otimes 1$$

erklärt. $X_{\phi}, \mathcal{X}_{\phi}$ heißt die Komplexifizierung von $X, \mathcal{X}$.

- Satz 1.0.2 a) Die Komplexifizierung $\mathcal{H}_{\phi}$ eines reellen Hilbert-
raumes $\mathcal{H}$ ist ein komplexer Hilbertraum.
b) Es ist $(\mathcal{L}(\mathcal{H}))_{\phi} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\phi})$
c) Die Komplexifizierung $\mathcal{M}_{\phi}$ einer reellen von Neu-
mann'schen Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist eine komplexe
von Neumann'sche Algebra.

Beweis a) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt von $\mathcal{H}$. Durch die Fest-
setzung

$$(1) \quad \langle x_1 \otimes 1 + iy_1 \otimes 1, x_2 \otimes 1 + iy_2 \otimes 1 \rangle_{\phi} := \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle + i(\langle y_1, x_2 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle)$$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ wird ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_{\phi}$ defi-
niert [18, §16,4] Es ist

$$(2) \quad \|x \otimes 1 + iy \otimes 1\|_{\phi}^2 = \langle x \otimes 1 + iy \otimes 1, x \otimes 1 + iy \otimes 1 \rangle_{\phi} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

für $x, y \in \mathcal{H}$.

Sei nun $\{x_n \otimes 1 + iy_n \otimes 1\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}_{\phi}$.
Aus (2) folgt, daß $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-
folgen aus $\mathcal{H}$ sind. Weil $\mathcal{H}$ vollständig ist, existieren
 $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Wiederum aus (2) folgt,
daß $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \otimes 1 + iy_n \otimes 1) = x \otimes 1 + iy \otimes 1$ ist. Damit ist die
Vollständigkeit von $\mathcal{H}_{\phi}$ gezeigt.

b) Für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ wird durch die Festsetzung

$$S \otimes 1 (x \otimes 1 + iy \otimes 1) := Sx \otimes 1 + iSy \otimes 1 \quad x, y \in \mathcal{H}$$

eine komplex lineare Abbildung von $\mathcal{H}_{\phi}$ in $\mathcal{H}_{\phi}$ defi-
niert. Aus der Beziehung

$$\|S \otimes 1 (x \otimes 1 + iy \otimes 1)\|_{\phi}^2 = \|Sx \otimes 1 + iSy \otimes 1\|_{\phi}^2 = \|Sx\|^2 + \|Sy\|^2$$

$$(3) \quad \|S\|^2 (\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq \|S\|^2 \|x + iy\|_{\phi}^2$$

folgt, daß

$$\|S\|_{\mathfrak{L}} := \sup_{\|x\otimes 1 + iy\otimes 1\|_{\mathfrak{L}} \leq 1} \|S\otimes 1(x\otimes 1 + iy\otimes 1)\|_{\mathfrak{L}} \leq \|S\|$$

ist. Da auch

$$\begin{aligned} \|S\|_{\mathfrak{L}} &= \sup_{\|x\otimes 1 + iy\otimes 1\|_{\mathfrak{L}} \leq 1} \|S\otimes 1(x\otimes 1 + iy\otimes 1)\|_{\mathfrak{L}} \stackrel{\Delta}{=} \sup_{\|x\otimes 1\|_{\mathfrak{L}} \leq 1} \|S\otimes 1(x\otimes 1)\|_{\mathfrak{L}} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Sx\| = \|S\| \end{aligned}$$

richtig ist, muß

$$(4) \quad \|S\|_{\mathfrak{L}} = \|S\|$$

sein. Insbesondere ist

$$(5) \quad (\mathcal{L}(\mathcal{H}))_{\mathfrak{L}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathfrak{L}}).$$

Umgekehrt läßt sich jeder Operator aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathfrak{L}})$ eindeutig in der Form $S\otimes 1 + iT\otimes 1$ darstellen, wobei S und T lineare Operatoren von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$ sind. [18, §16]

Wegen

$$\begin{aligned} \|(S\otimes 1 - iT\otimes 1)(x\otimes 1 + iy\otimes 1)\|_{\mathfrak{L}}^2 &= \|(Sx + Ty)\otimes 1 + i(Sy - Tx)\otimes 1\|_{\mathfrak{L}}^2 \\ &= \|Sx + Ty\|^2 + \|Sy - Tx\|^2 \\ &= \|Sx + Ty\|^2 + \|Tx - Sy\|^2 \\ &= \|Sx\otimes 1 + Ty\otimes 1 + (Tx\otimes 1 - Sy\otimes 1)\|_{\mathfrak{L}}^2 \\ &= \|(S\otimes 1 + iT\otimes 1)(x\otimes 1 - iy\otimes 1)\|_{\mathfrak{L}}^2 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \|S\otimes 1 - iT\otimes 1\|_{\mathfrak{L}} &= \sup_{\|x\otimes 1 + iy\otimes 1\|_{\mathfrak{L}} \leq 1} \|(S\otimes 1 - iT\otimes 1)(x\otimes 1 + iy\otimes 1)\|_{\mathfrak{L}} \\ &= \sup_{\|x\otimes 1 + iy\otimes 1\|_{\mathfrak{L}} \leq 1} \|(S\otimes 1 + iT\otimes 1)(x\otimes 1 - iy\otimes 1)\|_{\mathfrak{L}} \\ &= \|S\otimes 1 + iT\otimes 1\|_{\mathfrak{L}}. \end{aligned}$$

Also ist mit $S \otimes 1 + iT \otimes 1$ auch $S \otimes 1 - iT \otimes 1$ aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi)$.

$S \otimes 1 = \frac{1}{2} (S \otimes 1 + iT \otimes 1) + \frac{1}{2} (S \otimes 1 - iT \otimes 1)$ ist dann ebenfalls

aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi)$. Wegen (4) ist $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Analog zeigt

man, daß $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist. Also ist

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi) \subset (\mathcal{L}(\mathcal{H}))_\phi$$

und damit nach (5)

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi) = (\mathcal{L}(\mathcal{H}))_\phi.$$

c) Nach Teil b) ist $\mathcal{M}_\phi \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi)$. Sei mit $(S \otimes 1 + iT \otimes 1)^*$,

$S, T \in \mathcal{M}$ die bezüglich des Skalarproduktes $\langle, \rangle_\phi$

zu $S \otimes 1 + iT \otimes 1$ adjungierte Abbildung bezeichnet.

Dann ist

$$(6) \quad (S \otimes 1 + iT \otimes 1)^* = S^* \otimes 1 - iT^* \otimes 1$$

wobei S^*, T^* die bezüglich des Skalarproduktes $\langle, \rangle$

zu S, T adjungierte Abbildung ist, [18, §16,5.5]

Aus (6) folgt sofort, daß mit $\mathcal{M}$ auch $\mathcal{M}_\phi$ involutiv

ist. Es bleibt zu zeigen, daß $(\mathcal{M}_\phi)'' = \mathcal{M}_\phi$ ist. Sei

zunächst $S \otimes 1 + iT \otimes 1 \in (\mathcal{M}_\phi)'$. Dann ist insbesondere

$$(7) \quad (S \otimes 1 + iT \otimes 1)(S_1 \otimes 1) = (S_1 \otimes 1)(S \otimes 1 + iT \otimes 1)$$

für alle $S_1 \in \mathcal{M}$. Es folgt, daß

$$SS_1 = S_1S, \quad TS_1 = S_1T \quad S_1 \in \mathcal{M}$$

ist. Also sind $S, T \in \mathcal{M}'$ und damit

$$(8) \quad (\mathcal{M}_\phi)' \subset (\mathcal{M}')_\phi$$

offensichtlich ist $(\mathcal{M}')_\phi \subset (\mathcal{M}_\phi)'$

Damit haben wir

$$(\mathcal{M}')_\phi = (\mathcal{M}_\phi)'$$

und

$$(\mathcal{M}_\phi)'' = ((\mathcal{M}_\phi)')' = (\mathcal{M}'')_\phi = \mathcal{M}_\phi.$$

Wir definieren nun Abbildungen

$$\tau: \mathcal{M}_\Phi \longrightarrow \mathcal{M}_\Phi$$

$$\sigma: \mathcal{H}_\Phi \longrightarrow \mathcal{H}_\Phi$$

$$\text{durch } \tau(S \otimes 1 + i T \otimes 1) := S \otimes 1 - i T \otimes 1 \quad S \otimes 1 + i T \otimes 1 \in \mathcal{M}_\Phi$$

$$\sigma(x \otimes 1 + i y \otimes 1) := x \otimes 1 - i y \otimes 1 \quad x \otimes 1 + i y \otimes 1 \in \mathcal{H}_\Phi$$

Dann ist $\tau^2 = 1$ und $\sigma^2 = 1$.

Die wichtigsten Eigenschaften von σ und τ sind in dem folgenden Satz zusammengestellt.

Satz 1.0.3 Es gilt

- a) $\tau(A \cdot B) = \tau(A) \tau(B)$ $A, B \in \mathcal{M}_\Phi$
- b) $\tau(\lambda A) = \overline{\lambda} \cdot A$ $\lambda \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_\Phi$
- c) $\tau(A+B) = \tau(A) + \tau(B)$ $A, B \in \mathcal{M}_\Phi$
- d) $(\tau(A))^* = \tau(A^*)$ $A \in \mathcal{M}_\Phi$
- e) $A(\sigma(x)) = \sigma(\tau(A)(x))$ $x \in \mathcal{H}_\Phi, A \in \mathcal{M}_\Phi$
- f) $\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle_\Phi = \overline{\langle x, y \rangle_\Phi}$
- g) $\|\tau(A)\|_\Phi = \|A\|_\Phi$
- h) τ ist schwach, ultraschwach, stark und ultra-stark stetig.

Beweis Die Behauptungen a) - f) folgen sofort aus der Definition von τ und σ .

g) Für alle $A \in \mathcal{M}_\Phi$ ist $A^*A \leq \|A\|_\Phi^2 1$ d.h. es gibt

$B \in \mathcal{M}_\Phi$ mit $\|A\|_\Phi^2 1 - A^*A = B^*B$. Weil $\tau(1) = 1$ und

a) - d) richtig sind, folgt

$$\|A\|_\Phi^2 1 - \tau(A)^* \tau(A) = \tau(B)^* \tau(B).$$

Also ist $\tau(A)^* \tau(A) \leq \|A\|_\Phi^2 1$

und deshalb

$$(9) \quad \|\tau(A)\|_{\Phi}^2 = \|\tau(A^*)\tau(A)\|_{\Phi} \leq \|A^2\|_{\Phi}$$

wegen $\tau^2 = 1$ ist auch

$$(10) \quad \|A\|_{\Phi}^2 = \|\tau(A)\|_{\Phi}^2.$$

Aus (9) und (10) folgt

$$\|A\|_{\Phi} = \|\tau(A)\|_{\Phi}.$$

$$\begin{aligned} n) \text{ Wegen } |\langle (\tau(A))x, y \rangle_{\Phi}| &= |\langle \sigma(A(\sigma(x))), \sigma(\sigma(x)) \rangle_{\Phi}| \\ &= |\langle A(\sigma(x)), \sigma(x) \rangle_{\Phi}| \\ &= |\langle A(\sigma(x)), \sigma(x) \rangle_{\Phi}| \end{aligned}$$

ist τ schwach und ultraschwach stetig.

Wegen

$$\|\tau(A)(x)\|_{\Phi} = \|\sigma(A(\sigma(x)))\|_{\Phi} = \|A(\sigma(x))\|_{\Phi}$$

ist τ stark und ultrastark stetig.

q.e.d.

§ 1 Reelle W*-Algebren

Satz 1.0.3 des vorigen Paragraphen legt die folgende Definition nahe.

Def. 1.1.1 Eine Reelle W*-Algebra ist eine komplexe W*-Algebra $\mathcal{M}$ zusammen mit einer Abbildung $\bar{\cdot} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, für die folgendes gilt.

$$a) \quad \overline{(\lambda x)} = \bar{\lambda} \bar{x} \quad \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathcal{M}$$

$$b) \quad \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} \quad x, y \in \mathcal{M}$$

$$c) \quad \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad x, y \in \mathcal{M}$$

$$d) \quad \overline{(x^*)} = (\bar{x})^* \quad x \in \mathcal{M}$$

$$e) \quad \overline{\bar{x}} = x \quad x \in \mathcal{M}.$$

Eine Reelle W^* -Algebra ist also insbesondere immer eine komplexe W^* -Algebra. Andererseits sind Reelle W^* -Algebren aber eng mit reellen Algebren verwandt.

Um dies anzudeuten, schreiben wir Reell mit einem großen R.

Satz 1.0.3 zeigt, daß das Paar $(\mathcal{M}_\Phi, \tau)$ eine Reelle W^* -Algebra ist. Dieses Beispiel rechtfertigt auch noch einmal unseren Gebrauch des Wortes Reell.

Im Folgenden definieren wir auch für das Prädual $\mathcal{M}_*$ von $\mathcal{M}$ eine antilineare Abbildung $\tau': \mathcal{M}_* \rightarrow \mathcal{M}_*$, für die $(\tau')^2 = 1$ ist. Weil keine Verwechslungen möglich sind, schreiben wir auch hier für $\varphi \in \mathcal{M}_*$ $\tau'(\varphi) = \bar{\varphi}$.

Wir wollen zunächst noch an einige Grundlagen aus der Theorie der W^* -Algebren erinnern. Alle ohne Beweis angeführten Tatsachen können aus [26] entnommen werden. Ist $\mathcal{M}$ eine W^* -Algebra, so sei $P\mathcal{M} := \{p \in \mathcal{M} \mid p^* = p = p^2\}$ die Menge der Projektionen; $\mathcal{M}^{\text{H}} := \{x \in \mathcal{M} \mid x^* = x\}$ die Menge der Hermiteschen Elemente und $\mathcal{M}^+ := \{x \in \mathcal{M} \mid \text{es gibt ein } y \in \mathcal{M} \text{ mit } x = y^*y\}$ die Menge der positiven Elemente von $\mathcal{M}$. Für $x, y \in \mathcal{M}$ schreiben wir $x \geq y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathcal{M}^+$ ist. Sind $p, q \in P\mathcal{M}$, so ist $p \geq q$ genau dann, wenn $p \wedge q = q$.

Für eine Reelle W^* -Algebra $\mathcal{M}$ folgt aus Definition 1.1.1 sofort, daß $P\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\text{H}}$ und $\mathcal{M}^+$ bezüglich der Abbildung τ invariant sind.

Für $x \in \mathcal{M}$ definieren wir den linken Träger $l(x)$ durch $l(x) := \inf \{p \in P\mathcal{M} \mid px = x\}$ und den rechten Träger $r(x)$ durch $r(x) := \inf \{p \in P\mathcal{M} \mid xp = p\}$. Ist $x \in \mathcal{M}^{\text{H}}$, so heißt $l(x) = r(x) =: s(x)$ der Träger von x .

Das Zentrum $Z\mathcal{M}$ ist eine kommutative W^* -Algebra, somit ist $PZ\mathcal{M}$ die Menge der zentralen Projektionen von $\mathcal{M}$. Für jedes $p \in P\mathcal{M}$ existiert der zentrale Träger $c(p) \in PZ\mathcal{M}$, der durch $c(p) := \inf \{z \in PZ\mathcal{M} \mid zp = p\}$ definiert ist.

Zwei Projektionen $p, q \in P \mathcal{M}$ sind äquivalent, in Zeichen $p \sim q$, wenn es ein $u \in \mathcal{M}$ mit $u^*u = p$ und $uu^* = q$ gibt. Für jedes $x \in \mathcal{M}$ ist $1(x) \sim r(x)$. Ist $\mathcal{M}$ eine Reelle W^* -Algebra, so ist mit $p \sim q$ auch $\bar{p} \sim \bar{q}$.

Jede W^* -Algebra $\mathcal{M}$ besitzt per Definition ein Prädual $\mathcal{M}_*$.

Die $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$ - Topologie auf $\mathcal{M}$ nennen wir die schwache oder σ - Topologie. Ein normstetiges lineares Funktional φ auf $\mathcal{M}$ heißt positiv, wenn für alle $x \in \mathcal{M}$ $\varphi(x^*x) \geq 0$ ist.

Sei $T := \{ \varphi \mid \varphi \text{ ist } \sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}_*) \text{ - stetiges positives lineares Funktional auf } \mathcal{M} \}$, dann ist $\varphi \in T$ normal. Für $\varphi \in T, x \in \mathcal{M}$

setzen wir $\alpha_\varphi(x) := \varphi(x^*x)^{\frac{1}{2}}$. Die von der Familie $\{ \alpha_\varphi \mid \varphi \in T \}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{M}$ nennen wir die starke oder s -Topologie. Bezüglich der Stetigkeit von $\bar{\cdot}$ gilt das folgende Lemma.

Lemma 1.1.2 Sei $\mathcal{M}$ eine Reelle W^* -Algebra mit dem Prädual $\mathcal{M}_*$.

Dann gilt

a) $\bar{1}_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$

b) $\| \bar{x} \| = \| x \|$, $x \in \mathcal{M}$

c) $\bar{\cdot} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ induziert eine Abbildung $\bar{\cdot} : \mathcal{M}_* \longrightarrow \mathcal{M}_*$

für die $\| \bar{\varphi} \| = \| \varphi \|$, $\overline{\varphi + \psi} = \bar{\varphi} + \bar{\psi}$, $\overline{\lambda \varphi} = \bar{\lambda} \bar{\varphi}$ und $\bar{\bar{\varphi}} = \varphi$, $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*$ ist.

d) $\bar{\cdot} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ ist in der schwachen und starken Topologie stetig.

Beweis:

a) Die Behauptung folgt aus

$$\bar{1}_{\mathcal{M}} = \overline{1_{\mathcal{M}}} = \overline{1_{\mathcal{M}}} = \overline{1_{\mathcal{M}}} = 1_{\mathcal{M}}$$

b) Für alle $x \in \mathcal{M}$ ist

$$x x^* \leq \| x \|^2 1_{\mathcal{M}}$$

Nun bildet $\overline{}$ positive Elemente auf positive Elemente ab. Deshalb und wegen a) ist auch

$$\overline{x} \overline{x^*} \leq \|x\|^2 \cdot 1_{\mathcal{M}}$$

Es folgt

$$\|\overline{x}\|^2 = \|\overline{x} \overline{x^*}\| \leq \|x\|^2$$

und mit $\overline{\overline{x}} = x$

$$\|\overline{x}\|^2 = \|x\|^2$$

c) Für $\varphi \in \mathcal{M}_*$ und $x \in \mathcal{M}$ setzen wir

$$\overline{\varphi}(x) := \overline{\varphi(\overline{x})}$$

Hier bezeichnet $\overline{\varphi(\overline{x})}$ die zu $\varphi(\overline{x})$ konjugiert komplexe Zahl. Offensichtlich ist $\overline{\varphi}$ eine Linearform auf $\mathcal{M}$. $\overline{\varphi}$ ist beschränkt, da $\mathcal{M}_*$ in dem Normdualraum $\mathcal{M}^*$ von $\mathcal{M}$ enthalten ist. Aus b) folgt nun sofort

$$\|\overline{\varphi}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\overline{\varphi(\overline{x})}| = \sup_{\|\overline{x}\| \leq 1} |\varphi(\overline{x})| = \|\varphi\|.$$

Also ist $\overline{\varphi} \in \mathcal{M}_*$. Wir zeigen nun, daß $\overline{\varphi} \in \mathcal{M}_*$ ist.

Zunächst läßt sich nach [26, 1.14.3] $\varphi \in \mathcal{M}_*$ als

Summe

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4$$

schreiben, wobei φ_i , $1 \leq i \leq 4$, normale Funktionale aus $\mathcal{M}_*$ sind. Da

$$\overline{\varphi} = \overline{\alpha_1} \overline{\varphi_1} + \overline{\alpha_2} \overline{\varphi_2} + \overline{\alpha_3} \overline{\varphi_3} + \overline{\alpha_4} \overline{\varphi_4}$$

ist, reicht es zu zeigen, daß die Funktionale

$\overline{\varphi_i}$, $1 \leq i \leq 4$, aus $\mathcal{M}_*$ sind. Im Folgenden sei deshalb

O.B.d.A. φ ein normales Funktional. Die Positivität von $\overline{\varphi}$ folgt sofort aus

$$\overline{\varphi}(x*x) = \overline{\varphi(\overline{x} * \overline{x})} \geq 0, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Sei nun $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein gleichmäßig beschränktes, nach oben gerichtetes System aus positiven Elementen. Dann ist

$\{\bar{x}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein System mit den gleichen Eigenschaften.

Wie man leicht sieht, ist

$$\sup_{\alpha \in I} \{\bar{x}_\alpha\} = \overline{\sup_{\alpha \in I} \{x_\alpha\}}$$

Die Normalität von $\bar{\varphi}$ folgt nun aus

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\sup \{x_\alpha\}) &= \overline{\varphi(\sup_{\alpha} \{x_\alpha\})} = \overline{\varphi(\sup_{\alpha} \{\bar{x}_\alpha\})} \\ &= \overline{\sup_{\alpha} \varphi(\bar{x}_\alpha)} = \sup_{\alpha} \bar{\varphi}(x_\alpha) \end{aligned}$$

Nach [26, 1.13.2] ist somit $\bar{\varphi} \in \mathcal{M}_*$. Man rechnet nun unmittelbar nach, daß $\bar{\cdot}: \mathcal{M}_* \rightarrow \mathcal{M}_*$ ein involutorischer antilinearer Isomorphismus ist.

d) Sei $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein gerichtetes System mit $x_\alpha \rightarrow x$ in der $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$ -Topologie. Dann gilt

$$\bar{\varphi}(x_\alpha) \rightarrow \bar{\varphi}(x) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{M}_*.$$

Nach Definition von $\bar{\varphi}$ ist damit auch

$$\varphi(\bar{x}_\alpha) \rightarrow \varphi(\bar{x})$$

für alle $\varphi \in \mathcal{M}_*$ richtig. Dies bedeutet aber, daß

$$\bar{x}_\alpha \rightarrow \bar{x}$$

in der schwachen Topologie. Also ist $\bar{\cdot}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ schwach stetig.

Sei nun $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein gerichtetes System mit $x_\alpha \rightarrow x$ in der starken Topologie. Dann gilt für jedes schwach stetige positive Funktional φ

$$\varphi(x_\alpha * x_\alpha)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \varphi(x * x)^{\frac{1}{2}}$$

Mit c) folgt

$$\mathcal{F}(\overline{x}_\alpha^* \overline{x}_\alpha)^{\frac{1}{2}} = \overline{\mathcal{F}}(x_\alpha^* x_\alpha)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}(x^* x)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{F}(\overline{x}^* \overline{x})^{\frac{1}{2}}$$

$\{\overline{x}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ konvergiert somit in der starken Topologie gegen $\overline{x}$, das heißt $\overline{\cdot}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ist stark stetig.

q.e.d.

Wir setzen nun

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathcal{M} \mid \overline{x} = x\}$$

und

$$(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}} := \{\mathcal{F} \in \mathcal{M}_* \mid \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\}$$

Offensichtlich sind $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ und $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$ reelle Vektorräume.

Wegen 1.1.2a,c sind $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ und $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$ abgeschlossen.

Jedes $x \in \mathcal{M}$ läßt sich eindeutig als Summe

$$x = x_1 + ix_2 \quad x_1, x_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$$

schreiben, wobei $x_1 := \frac{1}{2}(x + \overline{x})$ und $x_2 := \frac{i}{2}(\overline{x} - x)$ ist.

Ebenso können wir jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_*$ eindeutig als Summe

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2 \quad \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in (\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$$

mit $\mathcal{F}_1 := \frac{1}{2}(\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}})$, $\mathcal{F}_2 := \frac{i}{2}(\overline{\mathcal{F}} - \mathcal{F})$ schreiben.

Man sieht leicht, daß durch

$$x = x_1 + ix_2 \longrightarrow x_1 \otimes 1 + ix_2 \otimes 1, \quad x_1, x_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $(\mathcal{M}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ gegeben ist. Eine

Reelle W^* -Algebra kann deshalb als Komplexifizierung ihrer Fixpunktalgebra $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ aufgefaßt werden.

Das Gleiche gilt für $\mathcal{M}_*$ und $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$.

Da $\mathcal{M}_*$ das Prädual von $\mathcal{M}$ ist, kann man erwarten, daß $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ der reelle Normdualraum von $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$ ist.

Satz 1.1.3 $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$ ist das Prädual von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

Beweis: Wegen 1.1.2 a, c sind $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ und $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$ reelle Banachräume. Sei x ein normstetiges, reellwertiges, lineares Funktional auf $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$. Wir müssen zeigen, daß $x \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist. Zunächst setzen wir durch

$$x(\varphi) := x(\varphi_1) + ix(\varphi_2) \quad \varphi_1, \varphi_2 \in (\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}, \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$$

x auf $\mathcal{M}_*$ fort. Man sieht leicht, daß das so fortgesetzte x ein komplex lineares, normstetiges Funktional auf $\mathcal{M}_*$ und damit in $\mathcal{M}$ ist. Für alle $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \in \mathcal{M}_*$ gilt

$$\begin{aligned} (\bar{x} - x)(\varphi) &= \varphi(\bar{x} - x) \\ &= \varphi_1(\bar{x} - x) + i\varphi_2(\bar{x} - x) \\ &= \bar{\varphi}_1(\bar{x}) - \varphi_1(x) + i(\bar{\varphi}_2(\bar{x}) - \varphi_2(x)) \\ &= \overline{\varphi_1(x)} - \varphi_1(x) + i(\overline{\varphi_2(x)} - \varphi_2(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\bar{x} = x$ und damit $((\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}})^* \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Sei nun $x \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Weil $\mathcal{M}_*$ die Norm von $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$ induziert, ist x ein normstetiges lineares Funktional auf $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$. Sei $\varphi \in (\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$. Wegen

$$x(\varphi) = \varphi(x) = \varphi(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)} = \overline{x(\varphi)}$$

ist x auf $(\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}}$ reellwertig. Es folgt $x \in ((\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}})^*$ und damit $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} \subset ((\mathcal{M}_*)_{\mathbb{R}})^*$.

Für eine reelle von Neumann'sche Algebra $\mathcal{M}$ ist offenbar $\mathcal{M} \cong (\mathcal{M}_{\Phi})_{\mathbb{R}}$. Nach Satz 1.1.3 ist $\mathcal{M} \cong (\mathcal{M}_{\Phi})_{\mathbb{R}} \cong ((\mathcal{M}_{\Phi})_{*})_{\mathbb{R}}^{*}$. Wir erhalten deshalb

Corollar 1.1.4 Jede reelle von Neumann'sche Algebra besitzt ein Prädual $\mathcal{M}_{*}$.

Beweis: Setze $\mathcal{M}_{*} = ((\mathcal{M}_{\Phi})_{*})_{\mathbb{R}}$.

□

q.e.d.

Wir wenden uns nun einigen einfachen Tatsachen über Projektionen aus $\mathcal{M}$ zu. Zunächst ist mit $p \in P\mathcal{M}$ $\bar{p}$ ebenfalls eine Projektion aus $\mathcal{M}$. Wir nennen $p \in P\mathcal{M}$ reell, wenn $p \in P\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}} =: P\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist. Reelle Projektionen werden immer mit den Buchstaben $g, h, \dots$ bezeichnet.

Lemma 1.1.5 Es gilt

- a) $1(\bar{x}) = \overline{1(x)}$, $r(\bar{x}) = \overline{r(x)}$ $x \in \mathcal{M}$
- b) $\sup(\bar{p}, \bar{q}) = \overline{\sup(p, q)}$
 $\inf(\bar{p}, \bar{q}) = \overline{\inf(p, q)}$ $p, q \in P\mathcal{M}$
- c) $\inf(q, \bar{q})$ ist die größte unter q liegende reelle Projektion. $\sup(q, \bar{q})$ ist die kleinste über q liegende reelle Projektion.
- d) $c(\bar{q}) = \overline{c(q)}$

Beweis: a) Es ist $q := 1(\bar{x}) = \inf \{ p \mid p\bar{x} = \bar{x} \}$
 $\implies q\bar{x} = \bar{x} \implies \bar{q}x = x \implies 1(x) \leq \bar{q} = \overline{1(\bar{x})}$
 $\implies \overline{1(x)} \leq 1(\bar{x})$

Wegen $\bar{\bar{x}} = x$ ist $\overline{1(\bar{x})} = 1(\bar{\bar{x}})$.

Analog zeigt man, $r(\bar{x}) = \overline{r(x)}$.

b) Es ist $\bar{p} \leq \sup(\bar{p}, \bar{q})$, $\bar{q} \leq \sup(\bar{p}, \bar{q})$.

Daraus folgt $p \leq \overline{\sup(\bar{p}, \bar{q})}$, $q \leq \overline{\sup(\bar{p}, \bar{q})}$,

also $\sup(p, q) \leq \overline{\sup(\bar{p}, \bar{q})}$ und damit

$\overline{\sup(p, q)} \leq \sup(\bar{p}, \bar{q})$. Aus $\bar{p} = p$, $\bar{q} = q$ folgt dann

$\overline{\sup(p, q)} = \sup(\bar{p}, \bar{q})$. Analog schließt man für

$\inf(\bar{p}, \bar{q})$.

c) Nach b) ist $\inf(q, \bar{q})$ eine reelle Projektion. Sei

$g \leq q$, $g \in P\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Dann ist auch $g = \bar{g} \leq \bar{q}$ und

damit ist $g \leq \inf(q, \bar{q})$. Analog schließt man für

$\sup(q, \bar{q})$.

d) Mit $z \in PZ\mathcal{M}$ ist auch $\bar{z} \in PZ\mathcal{M}$. Aus $q \leq c(q)$ folgt

$\bar{q} \leq \overline{c(q)}$. Also ist $c(\bar{q}) \leq \overline{c(q)}$. Eine Vertauschung

von q mit $\bar{q}$ ergibt $c(\bar{q}) = \overline{c(q)}$.

q.e.d.

Setzen wir für $x \in \mathcal{M}$ $|x| := (x^*x)^{\frac{1}{2}}$, so gibt es nach [26, 1.12.1] ein eindeutig bestimmtes $u \in \mathcal{M}$ mit

$$x = u |x|,$$

und $u^*u = r(x)$, $uu^* = l(x)$.

$x = u \cdot |x|$ heißt die Polarzerlegung von x .

Satz 1.1.6 Sei $\mathcal{M}$ eine Reelle W^* -Algebra und $x = u|x|$ die Polarzerlegung von $x \in \mathcal{M}$. Dann ist

$\bar{x} = \bar{u} \cdot |\bar{x}|$ die Polarzerlegung von $\bar{x}$.

Beweis: Da

$$u^*u = r(x) \quad , \quad uu^* = 1(x)$$

ist, folgt aus 1.1.5

$$\overline{u^*u} = r(\overline{x}) \quad , \quad \overline{uu^*} = 1(\overline{x}).$$

Offenbar ist $\overline{(|x|)} = |\overline{x}|$. Also folgt aus

$$x = u \cdot |x|$$

auch

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot |\overline{x}|.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Polarzerlegung muß

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot |\overline{x}|$$

die Polarzerlegung von $\overline{x}$ sein.

q.e.d.

Wenden wir dieses Ergebnis auf reelle von Neumann'sche Algebren an, so erhalten wir das folgende Corollar.

Corollar 1.1.7 Sei $\mathcal{M}$ eine reelle von Neumann'sche Algebra und

$T \in \mathcal{M}$. Setzen wir $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, so gibt es

ein $U \in \mathcal{M}$ mit

$$(11) \quad T = U |T|$$

und

$$(12) \quad U^*U = r(T) \quad , \quad UU^* = 1(T)$$

Beweis: Wir betrachten T als ein Element aus $(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}$.

Dann gibt es ein $U \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ mit den Eigenschaften (11)

und (12). Nach 1.1.6 ist U jedoch aus $(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ und

damit aus $\mathcal{M}$.

q.e.d.

$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist ein Baer *- Ring, für den sich viele Axiome aus [6], [21] verifizieren lassen. Insbesondere gilt in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ der Vergleichbarkeitssatz. Da wir diesen im Folgenden noch benötigen, beweisen wir ihn hier aus Gründen der Vollständigkeit.

Dazu benötigen wir den Funktionalkalkül für reelle Banach *- Algebren, der sich in [24] findet. Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\omega \rightarrow \tau(\omega)$ ein Homöomorphismus von Ω auf Ω . Sei $C_0(\Omega, \tau) := \{ f \in C_0(\Omega) \mid f(\tau(\omega)) = f(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega \}$. Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative reelle Banachalgebra, so bezeichne $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ den Raum der von Null verschiedenen Homomorphismen von $\mathcal{A}$ in $\mathbb{C}$. [24, III, §1] Bezeichnet $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von $\mathcal{A}$ [24, I, §3], so ist $\mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ homöomorph zu $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ [24, 3.1.4.] Falls $\mathcal{A}$ zusätzlich eine *- Algebra ist, für deren Norm

$$(13) \quad \|x\|^2 \leq \|x*x + y*y\|$$

gilt, so gibt es nach [24, 4.2.3] einen isometrischen *- Isomorphismus

$$\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow C_0(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}, \tau)$$

$\mathcal{F}$ ist die Gelfanddarstellung für reelle kommutative Banach *- Algebren. Für eine kommutative *- Unteralgebra von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist (13) offenbar stets erfüllt.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage das EP-Axiom aus [6, §7, Def.1] und [21] zu verifizieren.

Lemma 1.1.8 Zu jedem $0 \neq x \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ gibt es ein $y \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, das mit allen Elementen vertauschbar ist, die mit $x*x$ vertauschbar sind, so daß

$$x*x \cdot y^2 = : g$$

eine von Null verschiedene reelle Projektion ist.

Beweis: Sei C_R die von x^*x erzeugte maximale kommutative *- Unteralgebra von $\mathcal{M}_R$. Diese existiert nach dem Lemma von Zorn. Dann ist die Komplexifizierung $(C_R)_\mathbb{C}$ von C_R eine maximale kommutative C*- Unter- algebra von $\mathcal{M}$. Nach [26, 1.7.5] ist $\mathcal{P}_{(C_R)_\mathbb{C}}$ stone'sch. Dann ist auch $\mathcal{P}_{(C_R)}$ stone'sch, weil $\mathcal{P}_{C_R}$ und $\mathcal{P}_{(C_R)_\mathbb{C}}$ homöomorph sind. Sei $\Omega := \mathcal{P}_{(C_R)}$, und

$$\mathcal{F}: C_R \longrightarrow C_0(\Omega, \tau)$$

der Gelfandisomorphismus. Für ein $0 < \varepsilon < \|x\|$ ist

$$\Omega_1 := \{t \in \Omega \mid \mathcal{F}(x^*x)(t) > \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

Sei $\overline{\Omega}_1$ der Abschluß von Ω_1 und $\Omega_2 := \Omega - \overline{\Omega}_1$ das Komplement von Ω_1 in Ω . $\overline{\Omega}_1$ ist zugleich offen und abgeschlossen, weil Ω stone'sch ist.

Wir definieren nun

$$f(\omega) := \begin{cases} 0 & \omega \in \Omega_2 \\ \frac{1}{(\mathcal{F}(x^*x)(\omega))^{\frac{1}{2}}} & \omega \in \overline{\Omega}_1 \end{cases}$$

f ist stetig und $f(\tau \omega) = f(\omega)$; das heißt $f \in C_0(\Omega, \tau)$. Setzen wir

$$y := \mathcal{F}^{-1}(f)$$

so folgt aus der Konstruktion von f sofort, daß

$$x^*x y^2 = : g$$

eine reelle Projektion ist.

q.e.d.

Def. 1.1.9 Zwei Projektionen $g, h \in P\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ heißen reell äquivalent, in Zeichen $g \sim_{\mathbb{R}} h$, wenn es ein $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $u^*u = g$ und $uu^* = h$ gibt.

Lemma 1.1.10 [21, Th.58] Seien $g, h \in P\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ und $c(g) \cdot c(h) \neq 0$. Dann gibt es von Null verschiedene Projektionen $g_1, f_1 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $g_1 \leq g$, $h_1 \leq h$ und $g_1 \sim_{\mathbb{R}} h_1$.

Beweis: Nach [26, 1.11] ist wegen $c(g)c(h) \neq 0$ die komplexe Algebra $g\mathcal{M}h \neq \{0\}$. Weil $\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ erzeugt wird, ist auch $g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}h \neq \{0\}$. Es gibt deshalb ein $0 \neq x \in g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}h$. Nach Lemma 1.1.8 existiert ein $y \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, so daß $g_1 := xx^*y^2$ eine von Null verschiedene reelle Projektion ist. Aus $gx = x$ folgt $gg_1 = g_1$, das heißt $g_1 \leq g$. $u := y \cdot x$ ist in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ und

$$uu^* = yxx^*y = xx^*y^2 =: g_1$$

ist eine Projektion. Dann ist auch $u^*u =: h_1$ eine Projektion in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Aus $xh = h$ folgt nun, daß $h_1h = h_1$, das heißt $h_1 \leq h$ ist. Wegen $u^*u = h_1$ $uu^* = g_1$ ist $g_1 \sim_{\mathbb{R}} h_1$.

q.e.d.

Wir sind nun in der Lage den Vergleichbarkeitssatz zu beweisen. Wie üblich schreiben wir für $p, q \in P\mathcal{M}$ $p \leq q$ genau dann, wenn es ein $q_1 \in P\mathcal{M}$ mit $p \sim p_1 \leq q$ gibt. In Anlehnung an Definition 1.1.9 schreiben wir $g \leq_{\mathbb{R}} h$, falls $g \sim_{\mathbb{R}} g_1 \leq h$,

$g, g_1, h \in \mathcal{PM} \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, gilt.

Satz 1.1.10 (Vergleichbarkeitssatz, 12, Ch. III, §1, Satz 2)

Sind $g, h \in \mathcal{PM} \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, so gibt es eine Projektion $z \in \mathcal{PM} \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ für die

$$zh \preceq_{\mathbb{R}} zg$$

und

$$(1-z)h \succeq_{\mathbb{R}} (1-z)g$$

ist.

Beweis: Nach dem Zorn'schen Lemma existiert eine maximale Familie

$$\gamma := \left\{ (g_i, h_i) \mid i \in I \in \mathcal{PM}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{PM}_{\mathbb{R}} \mid g_i g_j = h_i h_j = 0, i \neq j, \right. \\ \left. \text{und } g_i \leq g, h_i \leq h, g_i \sim_{\mathbb{R}} h_i \text{ für alle } i \in I \right\}$$

Seien

$$g_0 := \sum_{i \in I} g_i \leq g, h_0 := \sum_{i \in I} h_i \leq h,$$

g_0 und h_0 sind Projektionen aus $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, weil $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ in $\mathcal{M}$ σ -geschlossen ist.

Sei $u_i^* u_i = g_i$ und $u_i u_i^* = h_i$ für $u_i \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, i \in I$.

Man sieht leicht, daß

$$u := \sum_{i \in I} u_i := s\text{-}\lim \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) \\ I_n \text{ endliche Teilmenge von } I$$

existiert. Offenbar ist

$$u^* u = g_0, \quad u u^* = h_0.$$

Weiterhin ist $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, weil $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ in $\mathcal{M}$ stark abgeschlossen ist, das heißt

$$g_0 \widetilde{\mathbb{R}} h_0.$$

Die Projektionen $c(g-g_0)$ und $c(h-h_0)$ sind nach 1.1.10 orthogonal, weil γ eine maximale Familie ist. Es gibt deshalb eine Projektion $z \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{Z} \mathcal{M}$ mit

$$c(g-g_0) \leq z, \quad c(h-h_0) \leq 1_{\mathcal{M}} - z.$$

Weil z zentral ist, gilt

$$g_0 z \widetilde{\mathbb{R}} h_0 z, \quad g_0 (1_{\mathcal{M}} - z) \widetilde{\mathbb{R}} h_0 (1_{\mathcal{M}} - z).$$

Es folgt

$$hz = h_0 z \widetilde{\mathbb{R}} g_0 z \leq gz$$

und

$$(1_{\mathcal{M}} - z)g = (1_{\mathcal{M}} - z)g_0 \widetilde{\mathbb{R}} (1_{\mathcal{M}} - z)h_0 \leq (1_{\mathcal{M}} - z)h.$$

q.e.d.

§ 2 Strikt rein Reelle W^* -Algebren

Sei $\mathcal{M}$ eine Reelle W^* -Algebra. Dann stellt sich die Frage, ob es zu jeder Projektion $q \in \mathcal{M}$ eine Projektion $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ gibt, so daß $q \sim g$ ist. Den weiteren Untersuchungen hinsichtlich dieser Frage schicken wir zunächst zwei klärende Beispiele voraus.

Beispiel 1

Sei $\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ die Menge der Diagonalmatrizen von $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. Δ ist offensichtlich eine kommutative komplexe von Neumann'sche Algebra. Setzen wir für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha_1 := \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \quad , \quad \alpha_2 := \frac{1}{2i} (\alpha - \beta)$$

so gilt

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad \beta = \alpha_1 - i\alpha_2 \quad .$$

Jede Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Delta$ läßt sich deshalb in der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

schreiben. Wir definieren nun eine Abbildung

$$- : \Delta \longrightarrow \Delta$$

durch

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} := \bar{\alpha}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{\alpha}_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Hier bezeichnet $\bar{\alpha}$ wieder die zu α konjugiert komplexe Zahl. Man bestätigt durch direktes Nachrechnen leicht, daß die so definierte Abbildung $-$ alle Bedingungen aus Def. 1.1.1 erfüllt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{R}} &= \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid \bar{\alpha}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{\alpha}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} . \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}\end{aligned}$$

Definieren wir

$$\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \Delta_{\mathbb{R}}$$

durch

$$\psi(\alpha) := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} ,$$

so ist ψ ein reeller Algebrasomorphismus. Also sind $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die einzigen Projektionen in $\Delta_{\mathbb{R}}$,

denn nur die Elemente $0, 1 \in \mathbb{C}$ sind idempotent. Andererseits ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Projektion, die weder zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ noch zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ äquivalent sein kann, weil Δ kommutativ ist. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist deshalb zu keiner Projektion aus $\Delta_{\mathbb{R}}$

äquivalent. Weiterhin bemerken wir noch, daß

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Es gibt deshalb eine zentrale Projektion

$q := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Delta$, für die $q \neq \bar{q}$ ist. Man könnte des-

halb zunächst vermuten, daß es zu $q \in P\mathcal{M}$ eine Projektion $g \in P\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $g \sim q$ gibt, wenn nur alle zentralen Projektionen aus $\mathcal{M}$ reell sind.

Das nächste Beispiel zeigt, daß dies noch nicht ausreicht.

Beispiel 2

Wir betrachten die komplexe von Neumann'sche Algebra

$\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. Man sieht leicht, daß die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ bilden. Wir erklären nun eine Abbildung

$$- : \mathcal{L}(\mathbb{C}^2) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$$

durch

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &:= \bar{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \bar{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \bar{\delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wiederum durch direktes Nachrechnen bestätigt man, daß

$- : \mathcal{L}(\mathbb{C}^2) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ alle Bedingungen aus Def. 1.1.1 erfüllt. Es ist klar, daß

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

ist. Sei $\mathbb{H}$ der Schiefkörper der Quaternionen mit den Erzeugenden i, j, k . Durch die Festsetzungen

$$\mathcal{Y}(1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}(i) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}(j) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}(k) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und durch lineare Fortsetzung von $\mathcal{Y}$ auf $\mathbb{H}$ wird ein reeller Algebraisomorphismus

$$\mathcal{Y} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$$

erklärt. Die einzigen idempotenten Elemente in $\mathbb{H}$ sind 0 und 1 , weil $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist. Also gibt es in

$\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ nur die Projektionen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ins-

besondere ist somit jede Projektion aus $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ zentral in $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$, obwohl $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ nicht kommutativ ist. $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ besitzt nur die zentralen Projektionen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Somit ist jede zentrale Projektion aus $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ auch in

$\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ und damit reell. Nun gibt es in $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ jedoch Projektionen, etwa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die nicht zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

äquivalent sind. Also gibt es in $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ auch Projektionen, die zu keiner Projektion aus $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ äquivalent sind.

Im 1. Fall ist $\triangle_{\mathbb{R}}$ reell isomorph zu $\mathbb{C}$, im 2. Fall ist

$\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ reell isomorph zu $\mathbb{H}$. Nun ist bekannt, daß $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ die einzigen reellen Divisionsalgebren sind. Wir können deshalb hoffen, daß unsere Vermutung in den Fällen, in denen $\mathcal{M}$ keinen "komplexen" oder "quaternionellen" direkten Summanden hat, richtig ist.

Bevor wir nun in der Theorie fortfahren, bemerken wir noch, daß es zu jedem $x \in \mathcal{M}$, $x^* = x$, eine eindeutig bestimmte Spektralschar $\{e(\lambda)\}_{-\infty < \lambda < +\infty}$ gibt, mit

$$(1) \quad x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d e(\lambda)$$

[26, 1.11.3] Weiterhin ist

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(\overline{e(\lambda)}) \quad ,$$

weil $\bar{\cdot} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ stark stetig und die Darstellung (1) eindeutig ist. [26, 1.11.3] Insbesondere gilt für $x \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, $x^* = x$, daß die Spektralprojektionen

$$\{e(\lambda)\}_{-\infty < \lambda < +\infty} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \text{ sind.}$$

Definition 1.2.1

Die Reelle W^* -Algebra $\mathcal{M}$ heißt rein Reell wenn im Zentrum von $\mathcal{M}$ nur reelle Projektionen liegen.

Lemma 1.2.2 $\mathcal{M}$ ist genau dann rein Reell, wenn im Zentrum von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ nur selbstadjungierte Elemente liegen.

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ rein Reell und $x \in Z\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

Weil $\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ erzeugt wird, ist x auch in $\mathcal{M}$ zentral.

Setzen wir

$$x_1 := \frac{1}{2}(x+x^*) \quad , \quad x_2 := \frac{1}{2i}(x-x^*)$$

so ist $x_1^* = x_1$, $x_2^* = x_2$, $x_1, x_2 \in Z\mathcal{M}$ und

$$x = x_1 + ix_2$$

Weil das Zentrum $Z\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ eine W^* -Algebra ist, gilt dort die Spektraldarstellung (1), das heißt

$$x_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_1(\lambda)$$

$$x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_2(\lambda)$$

$$\{e_1(\lambda)\}_{-\infty < \lambda < \infty} \subset PZ\mathcal{M}, \quad \{e_2(\lambda)\}_{-\infty < \lambda < \infty} \subset PZ\mathcal{M}.$$

Nach Voraussetzung sind alle zentralen Projektionen von $\mathcal{M}$ reell, also insbesondere auch die Spektralprojektionen von x_1 bzw. x_2 . Aus der starken Stetigkeit der Abbildung $\tau: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ folgt nun sofort, daß $x_1, x_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ sind. Es folgt $x = x_1$ und daraus $x^* = x$.

Gelte nun $x^* = x$ für alle $x \in Z\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ und sei $q = x_1 + iy_1 \in PZ\mathcal{M}$, $x_1, y_1 \in Z\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, eine Projektion. Aus $q^* = q$ folgt $y_1^* = -y_1$. Nach Voraussetzung muß $y = 0$ und damit $q = x_1$ reell sein.

q.e.d.

Nach diesem Lemma ist insbesondere für jeden reellen Hilbertraum $\mathcal{H}$ die von Neumann'sche Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathbb{C}}$ eine rein Reelle W^* -Algebra. Die von Neumann'sche Algebra $\triangle$ aus Beispiel eins ist keine rein Reelle W^* -Algebra. Die von Neumann'sche Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ aus Bei-

spiel zwei ist eine rein Reelle W^* -Algebra. Rein reelle W^* -Algebren lassen sich auch wie folgt charakterisieren.

Lemma 1.2.3 Eine Reelle W^* -Algebra $\mathcal{M}$ ist genau dann rein Reell, wenn für alle $q \in P\mathcal{M}$ $q \sim \bar{q}$ ist.

Beweis: Sei zunächst $q \sim \bar{q}$ für alle $q \in P\mathcal{M}$. Dann gilt insbesondere $z \sim \bar{z}$ für alle $z \in PZ\mathcal{M}$. Da äquivalente zentrale Projektionen immer gleich sind, muß $z = \bar{z}$ sein.

Sei nun $\mathcal{M}$ rein Reell. Dann gibt es eine zentrale Projektion $z \in \mathcal{M}$, $z = \bar{z}$, so daß $zq \prec z\bar{q}$

und

$$(1_{\mathcal{M}} - z)q \succ (1_{\mathcal{M}} - z)\bar{q}$$

ist. Da die Abbildung $\bar{}$ die Relation $\prec$ erhält, ist auch

$$z\bar{q} \prec zq$$

$$(1_{\mathcal{M}} - z)\bar{q} \succ (1_{\mathcal{M}} - z)q.$$

Es folgt $zq \sim z\bar{q}$, $(1_{\mathcal{M}} - z)\bar{q} \sim (1_{\mathcal{M}} - z)q$, und daraus $q \sim \bar{q}$.

q.e.d.

Sei nun $\mathcal{M}$ rein Reell und $g \in P\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Dann induziert $\bar{}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ eine Abbildung $\bar{}: g\mathcal{M}g \longrightarrow g\mathcal{M}g$. Es ist bekannt [26, 2.2.11], daß $Z(g\mathcal{M}g) = g \cdot Z\mathcal{M}$ ist. Deshalb ist mit $\mathcal{M}$ auch $g\mathcal{M}g$ eine rein Reelle W^* -Algebra.

Eine Projektion $q \in \mathcal{M}$ heißt abelsch, wenn $q\mathcal{M}q$ kommutativ ist. [26, 2.2.6] Abweichend hiervon, aber in Über-

einstimmung mit [6], [21], definieren wir reelle abelsche Projektionen.

Def. 1.2.4 Eine Projektion $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ heißt abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, wenn jede Projektion in $g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}g$ zentral ist.

Bei dieser Definition ist Vorsicht geboten. Wie Beispiel zwei zeigt, folgt aus der Tatsache, daß $g \in P\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist, nicht, daß $g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}g$ kommutativ ist. Insbesondere ist nicht richtig, daß eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsche Projektion auch in $\mathcal{M}$ abelsch ist.

Lemma 1.2.5 Sei $\mathcal{M}$ rein Reell und $g \in P\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Dann liegen im Zentrum von $g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}g$ genau die selbstadjungierten Elemente.

Beweis: Wir hatten schon gesehen, daß jedes zentrale Element in $g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}g$ selbstadjungiert ist. Sei nun $x \in g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}g$, $x^* = x$.

Dann gilt nach (1)

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de(\lambda) \quad e(\lambda) \in Pg\mathcal{M}_{\mathbb{R}}g$$

x ist nun zentral, weil alle Spektralprojektionen $e(\lambda)$ nach Voraussetzung zentral sind.

q.e.d.

Für abelsche Projektionen $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ gilt der folgende von Kaplansky [21, App. III, ThC] stammende Satz, der hier nur zitiert werden soll.

Satz 1.2.6 Sei $\mathcal{M}$ rein Reell und $g \in P\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Dann ist $g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}g$ eine direkte Summe

$$g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g = A \oplus B$$

wobei in A nur selbstadjungierte Elemente liegen und B der Ring der Quaternionen über seinem Zentrum ist.

Zum Beweis: Kaplansky beweist diesen Satz unter verschiedenen Voraussetzungen, die in unserem Fall alle erfüllt sind. Das SR-Axiom läßt sich leicht mit Hilfe des in § 1 angegebenen Funktionalkalküls verifizieren, das EP-Axiom ist nach 1.1.8 erfüllt. Partielle Isometrien $\{u_i\}_{i \in I} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ können aufaddiert werden, indem man $u := s - \lim_{i \in I} \sum_n u_i$ setzt. Schließlich besteht nach 1.2.5 das Zentrum von $g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g$ genau aus den selbstadjungierten Elementen.

Def. 1.2.7 Den direkten Summanden B aus 1.2.6 nennen wir quaternionell.

Die Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ aus Beispiel zwei ist offensichtlich quaternionell.

Def. 1.2.8 Sei $\mathcal{M}$ eine rein Reelle W^* -Algebra und g eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsche Projektion. $\mathcal{M}$ heißt strikt rein reell, wenn $g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g$ keinen quaternionellen direkten Summanden hat.

Die W^* -Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ aus Beispiel zwei ist nicht strikt rein Reell. Ist $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum, so sind die abelschen Projektionen von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gerade die Projektionen auf eindimensionale Unterräume von $\mathcal{H}$. Bezeichnet $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine solche Projektion, so enthält $G \mathcal{L}(\mathcal{H}) G$ nur selbstadjungierte Operatoren, $\mathcal{L}(\mathcal{H})_G$ ist deshalb eine strikt rein Reelle W^* -Algebra.

Sei $\mathcal{M}$ strikt rein Reell und $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsche Projektion; 1.2.6 in Verbindung mit 1.2.5 zeigen, daß $g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g$ dann kommutativ ist. Weil $g \mathcal{M} g$ von $g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g$ erzeugt wird, ist auch $g \mathcal{M} g$ kommutativ und g damit abelsch in $\mathcal{M}$.

Sei $\mathcal{M}$ rein reell, $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsche Projektion und $h \in g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g$ eine Projektion. Dann ist h auch in $g \mathcal{M} g$ zentral. Nach [26, 2.2.11] ist deshalb $h = c(h) g$.

Wir erhalten nun das folgende nützliche Kriterium für nicht abelsche Projektionen.

Lemma 1.2.9 Sei $\mathcal{M}$ rein Reell und $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine Projektion. g ist genau dann nicht abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, wenn es Projektionen $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, $0 < g_1 \leq g$, $0 < g_2 \leq g$ mit $g_1 \widetilde{\mathbb{R}} g_2$ und $g_1 g_2 = 0$ gibt.

Beweis: Sei zunächst g nicht abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Dann gibt es eine Projektion $h \in g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g$, so daß $h \neq c(h) g$ ist. Dann ist $c(h)(g-h) \neq 0$ und deshalb auch $c(h) \cdot c(g-h) \neq 0$. Nach Lemma 1.1.10 gibt es Projektionen $g_1 \leq h$, $g_2 \leq g-h$ mit $g_1 \widetilde{\mathbb{R}} g_2$.

Seien nun g_1, g_2 von Null verschiedene orthogonale Projektionen, so daß $g_1 \widetilde{\mathbb{R}} g_2$ und $g_1 \leq g$, $g_2 \leq g$ ist. Nehmen wir an, daß $g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g$ abelsch ist, so sind g_1 und g zentrale Projektionen in $g \mathcal{M}_{\mathbb{R}} g$. Also folgt $g_1 = g_2$. Wegen $g_1 g_2 = 0$ muß dann aber $g_1 = g_2 = 0$ sein, was ein Widerspruch ist.

Bevor wir fortfahren erinnern wir noch einmal an einige Tatsachen über Projektionen aus der Theorie der W^* -Algebren, die alle aus [26] entnommen werden können. Wir nennen eine Projektion p endlich, wenn aus $q \in P\mathcal{M}$ und $q \sim p \leq q$

stets $q = p$ folgt. Eine nicht endliche Projektion nen-
wir unendlich. $p \in P\mathcal{M}$ heißt eigentlich unendlich, wenn
für jedes $z \in PZ\mathcal{M}$ mit $pz > 0$ die Projektion pz unend-
lich ist.

Sei $\mathcal{M}$ strikt rein Reell. Wir zeigen nun, daß es zu je-
der Projektion $q \in \mathcal{M}$ eine Projektion $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $q \sim g$
gibt. Wir beweisen dies zunächst für endliche Projek-
tionen q .

Satz 1.2.10 Sei $\mathcal{M}$ strikt rein Reell und $0 < q \in \mathcal{M}$ eine endliche
Projektion. Dann gibt es eine Projektion $0 < g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$
mit $q \sim g$.

Bew. 1. Schritt

Wir beweisen zunächst, daß es zu $0 \neq q \in P\mathcal{M}$ eine Projek-
tion $0 \neq h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $h < q$ gibt.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall Sei $\sup(q, \bar{q})$ abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Dann ist $\sup(q, \bar{q})$ auch
abelsch in $\mathcal{M}$, weil $\mathcal{M}$ strikt rein Reell ist.
Es folgt, daß

$$q = c(q) \cdot \sup(q, \bar{q})$$

selbst eine reelle Projektion ist.

2. Fall Sei $\sup(q, \bar{q})$ nicht abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Nach Lemma 1.2.9
gibt es dann eine reelle Projektion $0 < g \leq \sup(q, \bar{q})$ mit

$$(2) \quad g \prec_{\mathbb{R}} \sup(q, \bar{q}) = g.$$

Außerdem gibt es eine zentrale Projektion $z \in \mathcal{M}$, so
daß

$$(3) \quad zq < zg$$

$$(4) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)q \prec (1_{\mathcal{M}} - z)g.$$

Dabei sind z und $1_{\mathcal{M}} - z$ reelle Projektionen, weil $\mathcal{M}$ rein
Reell ist. Wegen (3) gibt es eine Projektion q_1 mit

$$(5) \quad zq \sim q_1 \leq zg.$$

Annahme $\inf(q, \bar{q}) = \inf(q_1, \bar{q}_1) = (1_{\mathcal{M}} - z)g = 0$.

Aus dem Parallelogrammgesetz [26, 2.5] folgt dann

$$(6) \quad \sup(zq, z\bar{q}) = zq \sim z\bar{q}$$

$$(7) \quad \sup(q_1, \bar{q}_1) = q_1 \sim \bar{q}_1$$

Nach Lemma 1.2.3 ist $z\bar{q} \sim zq$ und $\bar{q}_1 \sim q_1$.

Wir erhalten mit (5)

$$(8) \quad z\bar{q} \sim zq \sim q_1 \sim \bar{q}_1$$

und mit (6) und (7)

$$(9) \quad \sup(zq, z\bar{q}) = zq \sim \sup(q_1, \bar{q}_1) = q_1.$$

Addieren wir hierzu (5), so erhalten wir

$$(10) \quad \sup(zq, z\bar{q}) - zq + zq \sim \sup(q_1, \bar{q}_1) - q_1 + q_1$$

und deshalb

$$(11) \quad \sup(zq, z\bar{q}) \sim \sup(q_1, \bar{q}_1).$$

Nun ist stets

$$(12) \quad \sup(zq, z\bar{q}) = z \cdot \sup(q, \bar{q}),$$

so daß nach (11) gilt

$$(13) \quad z \sup(q, \bar{q}) = \sup(zq, z\bar{q}) \sim \sup(q_1, \bar{q}_1) \leq zg \leq z \sup(q, \bar{q})$$

$\sup(q, \bar{q})$ ist nach [26, 2.2.5] ebenfalls endlich.

Also ist

$$(14) \quad \sup(q_1, \bar{q}_1) = zg = z \sup(q, \bar{q})$$

und deshalb

$$(15) \quad z(\sup(q, \bar{q}) - g) = 0.$$

Nach der Wahl von g (2) ist dann auch

$$(16) \quad zg = 0.$$

Da wir auch angenommen haben, daß $(1_{\mathcal{M}} - z)g = 0$ ist, muß

$g = (1_{\mathcal{M}} - z)g + zg = 0$ sein. Das ist ein Widerspruch.

Eine der drei Projektionen $\inf(q, \bar{q})$, $\inf(q_1, \bar{q}_1)$, $(1_{\mathcal{M}} - z)g$ muß deshalb von Null verschieden sein. Jede dieser Projektionen ist reell und es ist

$$\inf(q, \bar{q}) \leq q, \quad \inf(q_1, \bar{q}_1) \leq q, \quad (1_{\mathcal{M}} - z)g \leq q.$$

Wir können deshalb für h diejenige unter den Projektionen $\inf(q, \bar{q})$, $\inf(q_1, \bar{q}_1)$ oder $(1_{\mathcal{M}} - z)g$ nehmen, die von Null verschieden ist.

2. Schritt

Wir zeigen nun, daß es zu q eine reelle Projektion g mit $g \sim q$ gibt. Dazu betrachten wir das System

$$\mathcal{V} := \left\{ (p_i, g_i) \mid p_i \in \mathcal{M}, g_i \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, p_i \leq q, \right. \\ \left. p_i \sim g_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } p_i p_j = g_i g_j = 0 \text{ für } i \neq j \right\}.$$

Nach dem Lemma von Zorn kann $\mathcal{V}$ maximal gewählt werden.
Wir setzen

$$(17) \quad p := \sum_{i \in I} p_i \leq q, \quad g := \sum_{i \in I} g_i$$

Dann ist g reell und $g \sim p$.

Nehmen wir an, daß $q - p > 0$ ist, so gibt es nach Schritt 1 eine reelle Projektion $h \neq 0$ mit $h \leq q - p$. Weil q endlich ist, gilt

$$(18) \quad 1_{\mathcal{M}} - p \sim 1_{\mathcal{M}} - g.$$

Es folgt

$$(19) \quad c(h) \leq c(q - p) \leq c(1_{\mathcal{M}} - p) = c(1_{\mathcal{M}} - g)$$

Nach Lemma 1.1.10 existieren deshalb reelle Projektionen h_1, g_1 mit $0 \leq h_1 \leq h$, $0 \leq g_1 \leq 1_{\mathcal{M}} - g$ und $h_1 \widetilde{\mathbb{R}} g_1$.

Wegen

$$(20) \quad g_1 \sim h_1 \sim p_2 \leq q - p \leq q$$

vergrößert das Paar (g_1, p_2) die Familie $\mathcal{V}$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{V}$. Also ist $q = p$ und damit $q \sim g$.

q.e.d.

Da jede Projektion $q \in \mathcal{M}$ eine eindeutig bestimmte Zerlegung $q = q_1 + q_2$, $q_1 q_2 = 0$, q_1 endlich, q_2 eigentlich unendlich besitzt [26, 2.2], zeigen wir als Nächstes, daß jede eigentlich unendliche Projektion zu einer reellen Projektion äquivalent ist.

Lemma 1.2.11

Sei $\mathcal{M}$ eine rein Reelle W^* -Algebra und $q \in \mathcal{M}$ eine eigentlich unendliche Projektion. Dann ist $q \sim \sup(q, \bar{q})$.

Beweis: Nach dem Parallelogrammgesetz gilt

$$(21) \quad \sup(q, \bar{q}) - \bar{q} \sim q - \inf(q, \bar{q}) \leq q.$$

Da q eigentlich unendlich ist, gilt damit nach [26, 2.2.4] auch

$$(22) \quad \sup(q, \bar{q}) = (\sup(q, \bar{q}) - \bar{q}) + \bar{q} \prec q.$$

Es folgt

$$q \sim \sup(q, \bar{q})$$

q.e.d.

Aus dem Satz 1.2.10 und Lemma 1.2.11 folgt noch nicht unmittelbar, daß q zu einer reellen Projektion äquivalent ist, weil die in Satz 1.2.10 bzw. Lemma 1.2.11 angegebenen reellen Projektionen nicht notwendigerweise orthogonal sind.

Lemma 1.2.12

Seien $p, q \in \mathcal{M}$ orthogonale Projektionen, $g, h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ reelle Projektionen mit $p \sim g$ und $q \sim h$. Dann ist auch $p+q$ zu einer reellen Projektion äquivalent.

Beweis: Nach dem Vergleichbarkeitssatz (1.1.10) gibt es eine zentrale Projektion $z \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, so daß gilt

$$(23) \quad zg \prec_{\mathbb{R}} z(1_{\mathcal{M}} - h)$$

und

$$(24) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)g \prec_{\mathbb{R}} (1_{\mathcal{M}} - z)(1_{\mathcal{M}} - h)$$

Nach Voraussetzung ist $p \sim g$ und damit $(1_{\mathcal{M}} - z)g \sim (1_{\mathcal{M}} - z)p$. Somit folgt aus (24), daß es eine Projektion $p_1 \in \mathcal{M}$ gibt mit

$$(25) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)(1_{\mathcal{M}} - h) \sim p_1 \leq (1_{\mathcal{M}} - z)p.$$

Nach Voraussetzung ist $q \sim h$ und deshalb

$$(26) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)h \sim (1_{\mathcal{M}} - z)q$$

Eine Addition von (25) und (26) ergibt

$$(27) \quad (1_{\mathcal{M}} - z) \sim (1_{\mathcal{M}} - z)(p_1 + q) \leq (1_{\mathcal{M}} - z)(p + q).$$

Offensichtlich ist $(1_{\mathcal{M}} - z)(p+q) \leq (1_{\mathcal{M}} - z)$. Es folgt deshalb aus (27)

$$(28) \quad (1_{\mathcal{M}} - z) \sim (1_{\mathcal{M}} - z)(p+q).$$

Nach (23) existiert eine Projektion $g_1 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit

$$(29) \quad zp \sim zg \sim g_1 \leq z(1_{\mathcal{M}} - h).$$

Da nach Voraussetzung $q \sim h$ gilt, folgt aus (29)

$$(30) \quad z(p+q) \sim g_1 + zh$$

Addieren wir nun (30) zu (28), so erhalten wir

$$(31) \quad 1_{\mathcal{M}} - z + g_1 + zh \sim p+q.$$

Da aber $(1_{\mathcal{M}} - z) + g_1 + zh$ eine reelle Projektion ist, folgt die Behauptung.

q.e.d.

Satz 1.2.13 Sei $\mathcal{M}$ strikt rein Reell und $q \in \mathcal{M}$ eine Projektion.

Dann gibt es eine reelle Projektion $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $q \sim g$.

Beweis: $q \in \mathcal{M}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$q = q_1 + q_2$, wobei q_1 und q_2 orthogonale Projektionen sind mit q_1 endlich und q_2 eigentlich unendlich.

Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 1.2.10, Lemma 1.2.11 und Lemma 1.2.12.

q.e.d.

Zwei reelle, in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ äquivalente Projektionen g und h sind auch in $\mathcal{M}$ äquivalent. Die Umkehrung gilt jedoch nicht ohne weiteres. Sie ist aber gültig, falls $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra ist. Der Beweis dieser Behauptung ist Gegenstand der folgenden Ausführungen.

Lemma 1.2.14 Sei $\mathcal{M}$ eine Reelle W^* -Algebra. Sind $g, h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ reelle endliche Projektionen mit $g \sim h$, so gilt auch $g \widetilde{\sim}_{\mathbb{R}} h$.

Beweis: Wir vergleichen g und h in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Es gibt eine zentrale Projektion $z \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ und reelle Projektionen g_1 und h_1 mit

$$(32) \quad zg \widetilde{\sim}_{\mathbb{R}} h_1 \leq zh$$

und

$$(33) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)g \geq g_1 \underset{\mathbb{R}}{\sim} (1_{\mathcal{M}} - z)h.$$

Diese Beziehungen sind auch in $\mathcal{M}$ richtig.

Aus der Voraussetzung $g \sim h$ und (32), (33) folgt

$$(34) \quad zh \sim zg \underset{\mathbb{R}}{\sim} h_1 \leq zh$$

$$(35) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)g \sim (1_{\mathcal{M}} - z)h \underset{\mathbb{R}}{\sim} g_1 \leq (1_{\mathcal{M}} - z)g.$$

Aus der Endlichkeit von g bzw. h folgt unmittelbar

$h_1 = zh$ und $g_1 = (1_{\mathcal{M}} - z)g$. Damit ist nach (32) und (33)

$$g = zg + (1_{\mathcal{M}} - z)g \underset{\mathbb{R}}{\sim} h_1 + (1_{\mathcal{M}} - z)g = zh + (1_{\mathcal{M}} - z)h = h.$$

q.e.d.

Für die weitere Behandlung des Problems wird die Einteilung der Algebren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ in verschiedene Typen notwendig. Wir halten uns hierbei an die Klassifizierung von [6, §15], die für beliebige Baer*-Ringe gültig ist, also insbesondere auch für $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Für die W^* -Algebra $\mathcal{M}$ stimmt die in [6, §15] vorgenommene Einteilung mit der in [26, 2.2] überein.

Der folgende Satz zeigt, daß in gewissen Fällen der Typ von $\mathcal{M}$ schon durch den Typ von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ bestimmt ist.

Satz 1.2.15 Sei $\mathcal{M}$ strikt rein Reell. Dann gilt:

- a) $\mathcal{M}$ ist genau dann eine Typ I-Algebra, wenn $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine Typ I-Algebra ist.
- b) $\mathcal{M}$ ist genau dann kontinuierlich, wenn $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ kontinuierlich ist.

Beweis: a) Sei $\mathcal{M}$ eine Typ I-Algebra. Dann gibt es eine abelsche Projektion $q \in \mathcal{M}$ mit $c(q) = 1_{\mathcal{M}}$ [6, §15, Def. 3]. Nach Satz 1.2.13 gibt es eine Projektion $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $g \sim q$. g ist nach [26, 2.2.7] ebenfalls eine abelsche Projektion mit dem gleichen zentralen Träger $c(g) = 1_{\mathcal{M}}$. Da die W^* -Algebra $g\mathcal{M}g$ von ihren Projektionen erzeugt wird, sind $g\mathcal{M}g$ und damit auch $g\mathcal{M}_{\mathbb{R}}g$ kommutativ. Also ist g abelsch bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

Sei nun $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine Typ I-Algebra und g eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsche Projektion mit $c(g) = 1_{\mathcal{M}}$. Dann ist g aber auch abelsch in $\mathcal{M}$, weil $\mathcal{M}$ strikt rein reell ist.

b) $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ sind genau dann kontinuierlich, wenn $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ keine von Null verschiedene abelsche Projektion enthalten [6, §15, Def.3]. Die Behauptung läßt sich deshalb analog zu a) beweisen.

q.e.d.

Der Vollständigkeit wegen führen wir nun noch zwei Lemmata an, die sich auch in [6] finden lassen.

Lemma 1.2.16 Seien $\mathcal{M}$ eine Reelle W^* -Algebra und $g, h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ abelsche Projektionen in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $c(g) = c(h)$. Dann gilt $g \sim_{\mathbb{R}} h$.

Beweis: Nach Satz 1.1.10 können wir g und h in $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$ vergleichen. Also existiert eine zentrale Projektion $z \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit

$$(36) \quad zg \leq_{\mathbb{R}} zh$$

und

$$(37) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)g \geq_{\mathbb{R}} (1_{\mathcal{M}} - z)h$$

Also gibt es eine Projektion $h_1 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, so daß

$$(38) \quad zg \sim_{\mathbb{R}} h_1 \leq zh$$

Es folgt $zc(g) = c(h_1) \leq zc(h) = zc(g)$ und daraus $c(h_1) = zc(h)$. Außerdem haben wir $h_1 = c(h_1)h$, weil h abelsch ist. Dies führt zu $h_1 = c(h_1)h = zh$.

Aus (38) folgt somit

$$(39) \quad zg \sim_{\mathbb{R}} zh.$$

Analog zeigt man, daß $(1_{\mathcal{M}} - z)g \sim_{\mathbb{R}} (1_{\mathcal{M}} - z)h$.

Lemma 1.2.17 Seien $g, h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ Projektionen, so daß $c(g) \leq c(h)$ und g abelsch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist. Dann gilt $g \leq_{\mathbb{R}} h$.

Beweis: Es gibt eine zentrale Projektion $z \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit

$$(40) \quad zg \leq_{\mathbb{R}} zh$$

und

$$(41) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)g \geq_{\mathbb{R}} (1_{\mathcal{M}} - z)h.$$

Aus (41) und der Voraussetzung folgt

$$(42) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)c(h) \leq (1_{\mathcal{M}} - z)c(g) \leq (1_{\mathcal{M}} - z)c(h).$$

und damit $(1_{\mathcal{M}} - z)c(g) = (1_{\mathcal{M}} - z)c(h)$. Aus Lemma 1.2.16 folgt nun sofort, daß

$$(43) \quad (1_{\mathcal{M}} - z)g \underset{\mathbb{R}}{\sim} (1_{\mathcal{M}} - z)h, \text{ also}$$

$$(44) \quad g = zg + (1_{\mathcal{M}} - z)g \leq zh + (1_{\mathcal{M}} - z)h = h.$$

q.e.d.

Nach [6, §15, Prop. 2] ist $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ genau dann endlich in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, wenn für jede Projektion $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ aus $g \underset{\mathbb{R}}{\widehat{<}} h \leq g$ stets $g = h$ folgt. Weil die Existenz einer Projektion $q \in \mathcal{M}$, $q \notin \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $g \sim q \leq g$ zunächst nicht ausgeschlossen werden kann, folgt nicht unmittelbar, daß g auch in $\mathcal{M}$ endlich ist.

Lemma 1.2.18 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle Typ I-Algebra und $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ endliche Projektion. Dann ist g auch in $\mathcal{M}$ endlich.

Beweis: Sei $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ endliche Projektion. Wir nehmen an, daß g unendlich in $\mathcal{M}$ ist. Dann gibt es eine Zerlegung $g =: g_1 + g_2$, $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, so daß g_1 endlich in $\mathcal{M}$ und g_2 eigentlich in $\mathcal{M}$ ist. Nach Annahme ist $g_2 \neq 0$. Da mit $\mathcal{M}$ auch $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine Typ I-Algebra ist, gibt es eine abelsche Projektion $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, so daß $c(h) = c(g_2)$ ist. Insbesondere ist nach Lemma 1.2.17 $h \underset{\mathbb{R}}{\widehat{<}} g_2$.

Sei $\mathcal{I} = \{h_i \mid h_i \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, h_i \text{ Projektion in } \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, h_i \sim h$
 $h_i \leq g_2 \text{ für alle } i \in I \text{ und } h_i h_j = 0$
 für $i \neq j$.

Nach dem Zorn'schen Lemma kann $\mathcal{I}$ maximal gewählt werden. Für $h_i \in \mathcal{I}$ setzen wir $k := \sum_{i \in I} h_i \leq g_2$. Alle Projektionen h_i , $i \in I$, sind endlich in $\mathcal{M}$, weil sie in $\mathcal{M}$ abelsch sind [26, 2.2.8]. Aus der Annahme $\text{card } I < +\infty$ folgt, daß h in $\mathcal{M}$ endlich ist. Dann ist $g_2 = k \sim g_2$, denn g_2 ist eigentlich unendlich in $\mathcal{M}$. Es folgt weiter $c(g_2 - k) = c(g_2) = c(h)$ und daraus mit Lemma 1.2.17 $h \underset{\mathbb{R}}{\widehat{<}} g_2 - k$. Also

existiert eine Projektion $\tilde{h} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $h \sim \tilde{h} \leq g_2 - k$, das heißt $\tilde{h} \in \mathcal{J}$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{J}$. Also ist $\text{card } I = +\infty$, so daß $k = \sum_{i \in I} h_i$ in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ unendlich ist.

Wegen $g_2 \geq k$ ergibt sich ein Widerspruch.

q.e.d.

Wir geben nun ein wichtiges Kriterium dafür an, daß zwei in $\mathcal{M}$ äquivalente reelle Projektionen g, h auch in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ äquivalent sind.

Lemma 1.2.19 Sei $\mathcal{M}$ strikt rein Reell und $g, h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ Projektionen, die in $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich sind. Es gebe reelle Projektionen g_1, g_2, h_1, h_2 die folgenden Bedingungen genügen: $g = g_1 + g_2, g_1 g_2 = 0$, $g_1 \sim_{\mathbb{R}} g_2$ und $h = h_1 + h_2, h_1 h_2 = 0$, $h_1 \sim_{\mathbb{R}} h_2$, dann folgt aus $g \sim h$ stets $g \sim_{\mathbb{R}} h$.

Beweis: Es gibt $w \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $w^* w = g_1$ und $w w^* = g_2$. Man rechnet leicht nach, daß $q := \frac{1}{2} (g_1 + g_2) + \frac{1}{2} (w^* w)$ eine Projektion mit $\bar{q} = \frac{1}{2} (g_1 + g_2) = \frac{1}{2} (w^* - w)$ ist. Es folgt $q \bar{q} = 0$ und $g = q + \bar{q}$. q ist eigentlich unendlich in $\mathcal{M}$, denn sonst gäbe es eine zentrale Projektion $z \in \mathcal{M}$, so daß $0 < zq$ endlich wäre. Wegen $zq \sim z\bar{q}$ wären dann auch $z\bar{q}$ und $zg = z(q + \bar{q}) > 0$ endlich. Das wäre ein Widerspruch. Also ist q eigentlich unendlich in $\mathcal{M}$. Nach 2.2.4 gibt es orthogonale Projektionen q_1, q_2 mit $q \sim q_1 \sim q_2$ und $q = q_1 + q_2$. Es folgt $q_1 \sim q, q_2 \sim \bar{q}$ und damit $q = q_1 + q_2 \sim q + \bar{q} = g$. Analog hierzu gibt es orthogonale Projektionen $p, \bar{p}$ mit $h = p + \bar{p}$ und $h \sim p$. Aus $g \sim h$ folgt sofort, daß $q \sim p$ ist. Daher gibt es ein Element $v \in \mathcal{M}$ mit $v^* v = q$ und $vv^* = p$. Dann gilt auch $\bar{v}^* \bar{v} = \bar{q}$ und $\bar{v} \bar{v}^* = \bar{p}$. Es folgt $(v + \bar{v})^* (v + \bar{v}) = q + \bar{q} = g$ und $(v + \bar{v})(v + \bar{v})^* = p + \bar{p} = h$. Wegen $v + \bar{v} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist somit $g \sim_{\mathbb{R}} h$.

q.e.d.

Bekanntlich [6, §19, Lemma 2] läßt sich eine reelle Projektion g in zwei äquivalente orthogonale Projektionen zerlegen, wenn $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ kontinuierlich ist. Den Beweis dieses Satzes führen wir hier der Vollständigkeit wegen an.

Lemma 1.2.20 Sei $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ kontinuierlich, und $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine Projektion. Dann gibt es orthogonale Projektionen $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, so daß $g = g_1 + g_2$ und $g_1 \widetilde{\mathbb{R}} g_2$ ist.

Beweis: Wir betrachten die Familie von Paaren von reellen Projektionen

$$\mathcal{V} = \left\{ (g_i, h_i) \mid (g_i, h_i) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, g_i g_j = h_i h_j = g_k h_{\mu} = 0 \right. \\ \left. i \neq j, k \neq \mu, g_i \widetilde{\mathbb{R}} h_i \quad i \in I \right\}.$$

Nach Lemma 1.2.9 ist $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Wir wählen $\mathcal{V}$ nach dem Zornschen Lemma maximal und setzen

$$g_1 := \sum_{i \in I} g_i \quad g_2 := \sum_{i \in I} h_i$$

Da $h := g - g_1 - g_2$ nach Voraussetzung nicht abelsch ist, gibt es nach Lemma 1.2.9 orthogonale Projektionen

$0 \neq h_1 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, 0 \neq h_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $h_1 \leq h, h_2 \leq h$ und $h_1 \widetilde{\mathbb{R}} h_2$, falls $h \neq 0$ ist. Das Paar (h_1, h_2) vergrößert dann $\mathcal{V}$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität. Also muß $h = 0$ und somit $g = g_1 + g_2, g_1 \widetilde{\mathbb{R}} g_2$ sein.

q.e.d.

Als Letztes benötigen wir noch ein weiteres Ergebnis aus der Theorie der Baer*-Ringe,

Lemma 1.2.21 Sei $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eigentlich unendliche Projektion. Dann gibt es orthogonale Projektionen $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $g = g_1 + g_2$ und $g \widetilde{\mathbb{R}} g_1 \widetilde{\mathbb{R}} g_2$.

Zum Beweis: In [6, §17, Th.1] wird dieses Lemma unter Annahme eines GC-Axioms bewiesen. Das GC-Axiom ist jedoch nichts anderes als der Vergleichbarkeitssatz der für $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ nach Satz 1.1.10 richtig ist.

Wir kommen nun zu dem zweiten Hauptergebnis dieses Paragraphen.

Satz 1.2.22 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra und $g, h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ Projektionen. Dann folgt aus $g \sim h$ stets $g \widetilde{\mathbb{R}} h$.

Beweis: Nach gibt es eindeutig bestimmte zentrale Projektionen $z_1, z_2 \in \mathcal{M}$ so daß $z_1 \mathcal{M}$ eine Typ I W^* -Algebra, $z_2 \mathcal{M}$ eine kontinuierliche W^* -Algebra und $\mathcal{M} = z_1 \mathcal{M} + z_2 \mathcal{M}$ ist. Es folgt

$$g = z_1 g + z_2 g = : g_1 + g_2$$

$$h = z_1 h + z_2 h = : h_1 + h_2$$

und $g_1 \sim h_1$, $g_2 \sim h_2$. Weiterhin gibt es reelle Projektionen e_3, e_4, e_5, e_6 und h_2, h_4, h_5, h_6 , so daß

$$e_1 = e_3 + e_4 \quad e_3 \text{ endlich in } z_1 \mathcal{M}, \quad e_4 \text{ eigentlich unendlich in } z_1 \mathcal{M}$$

$$e_2 = e_5 + e_6 \quad e_5 \text{ endlich in } z_2 \mathcal{M}, \quad e_6 \text{ eigentlich unendlich in } z_2 \mathcal{M}$$

$$h_1 = h_3 + h_4 \quad h_3 \text{ endlich in } z_1 \mathcal{M}, \quad h_4 \text{ eigentlich unendlich in } z_1 \mathcal{M}$$

$$h_2 = h_5 + h_6 \quad h_5 \text{ endlich in } z_2 \mathcal{M}, \quad h_6 \text{ eigentlich unendlich in } z_2 \mathcal{M}$$

und $g_3 \sim h_3$, $g_4 \sim h_4$, $g_5 \sim h_5$, $g_6 \sim h_6$ ist.

Nach Lemma 1.2.14 folgt $g_3 \widetilde{\mathbb{R}} h_3$ und $g_5 \widetilde{\mathbb{R}} h_5$. Nach Satz 1.2.15 ist $z_1 \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine Typ I-Algebra und nach Lemma 1.2.18 sind g_4 und h_4 eigentlich unendliche Projektionen in $z_1 \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Diese lassen sich nach Lemma 1.2.21 in zwei äquivalente orthogonale Projektionen zerlegen, so daß auf g_4 und h_4 Lemma 1.2.19 angewendet werden kann. Daher ist $g_4 \widetilde{\mathbb{R}} h_4$. Satz 1.2.15 und Lemma 1.2.20 zeigen, daß auch die Projektionen g_6 und h_6 die Voraussetzungen von Lemma 1.2.19 erfüllen. Also ist $g_6 \widetilde{\mathbb{R}} h_6$.

Es folgt

$$g = g_3 + g_4 + g_5 + g_6 \widetilde{\mathbb{R}} h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = h.$$

q.e.d.

In Übereinstimmung mit diesem Satz unterscheiden wir in Zukunft für strikt rein Reelle W^* -Algebren nicht mehr zwischen $g \sim h$ und $g \widetilde{\mathbb{R}} h$.

In Lemma 1.2.18 wurde gezeigt, daß jede reelle in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ endliche Projektion auch in $\mathcal{M}$ endlich ist, sofern $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle, Typ I W^* -Algebra ist. Wir beweisen dies nun für beliebige strikt rein Reelle W^* -Algebren.

Satz 1.2.21 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra und $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine in $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ endliche Projektion. Dann ist g auch in $\mathcal{M}$ endlich.

Beweis: $\mathcal{N} := g\mathcal{M}g$ ist ebenfalls eine strikt rein Reelle W^* -Algebra. Wir müssen zeigen, daß für eine Projektion $q \in \mathcal{N}$ aus $q \sim 1_{\mathcal{N}}$ stets $q = 1_{\mathcal{N}}$ folgt.

Annahme $\mathcal{N}$ ist rein unendlich.

Wir wählen Projektionen $0 < g_1 \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ und $0 < g_2 \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}}$, so daß $g_1 g_2 = 0$ und $g_1 \sim g_2$ ist. Dann ist nach Annahme $g_1 + g_2 \sim g_1$ und nach Satz 1.2.22 gilt $g_1 + g_2 \widetilde{\sim} g_1$. Weil $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ endlich ist, folgt $g_1 + g_2 = g_1$ und daher $g_2 = 0$. Das ist ein Widerspruch.

Also kann $\mathcal{N}$ nicht rein unendlich sein. Es gibt deshalb eine endliche Projektion $0 < p \in \mathcal{N}$, und nach Satz 1.2.10 können wir annehmen, daß $p = h \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ ist. Wir zeigen zunächst, daß $\inf(q, \bar{q}) \neq 0$ ist.

Annahme $\inf(q, \bar{q}) = 0$. Dann folgt aus dem Parallelogrammgesetz

$1_{\mathcal{N}} \geq \sup(q, \bar{q}) \geq \sup(q, \bar{q}) - q \sim \bar{q} \sim q \sim 1_{\mathcal{N}}$, also $1_{\mathcal{N}} \geq \sup(q, \bar{q}) \sim 1_{\mathcal{N}}$. Aus der Endlichkeit von $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ folgt $\sup(q, \bar{q}) = 1_{\mathcal{N}}$, $1_{\mathcal{N}} - q \sim q \sim 1_{\mathcal{N}}$ und damit $h < 1_{\mathcal{N}} - q$. Es gibt deshalb eine Projektion q_1 , so daß $h \wedge q_1 \leq 1_{\mathcal{N}} - q$ gilt. Nun ist $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ in $\mathcal{M}$ endlich, so daß $1_{\mathcal{N}} - h \wedge 1_{\mathcal{N}} - q_1 \geq q \sim 1$ ist. Daher folgt $1_{\mathcal{N}} - h \sim 1_{\mathcal{N}}$, was nach Satz 1.2.22 auch in $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ richtig ist. Aus der Endlichkeit von $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ folgt $1_{\mathcal{N}} - h = 1_{\mathcal{N}}$, das heißt $h = 0$. Das ist ein Widerspruch.

Also muß $\inf(q, \bar{q}) \neq 0$ sein für alle Projektionen $q \in \mathcal{N}$ mit $q \sim 1_{\mathcal{N}}$. Wenden wir Satz 1.2.10 auf die reduzierte Algebra $(1_{\mathcal{N}} - \inf(q, \bar{q}))\mathcal{N}(1_{\mathcal{N}} - \inf(q, \bar{q}))$ an, so erhalten wir eine Projektion $h_1 \in (1_{\mathcal{N}} - \inf(q, \bar{q}))\mathcal{N}(1_{\mathcal{N}} - \inf(q, \bar{q}))$ mit

$$(45) \quad q - \inf(q, \bar{q}) \sim h_1 \leq 1_{\mathcal{N}} - \inf(q, \bar{q})$$

Es folgt

$$(46) \quad 1_{\mathcal{N}} \geq h_1 + \inf(q, \bar{q}) \sim q - \inf(q, \bar{q}) + \inf(q, \bar{q}) = q \sim 1_{\mathcal{N}}$$

und damit

$$(47) \quad 1 = h_1 + \inf(q, \bar{q})$$

denn $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ ist nach Voraussetzung endlich. Aus (45) folgt somit, daß $q - \inf(q, \bar{q}) \sim 1_{\mathcal{N}} - \inf(q, \bar{q})$ ist. Nach dem ersten

Teil des Beweises muß

$\inf(q - \inf(q, \bar{q}), \bar{q} - \inf(q, \bar{q})) \neq 0$ sein, falls $1_{\mathcal{V}} - \inf(q, \bar{q}) \neq 0$. Das ist aber unmöglich, weil $\inf(q, \bar{q})$ die größte unter q liegende reelle Projektion ist (Lemma 1.1.5c), somit ist $\inf(q, \bar{q}) = 1_{\mathcal{V}}$ und damit $q = 1_{\mathcal{V}}$.

q.e.d.

Unsere bisherigen Ergebnisse fassen wir noch einmal in einem Satz zusammen.

Satz 1.2.24 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra. Dann gilt

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $\mathcal{M}$ endlich | $\iff \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ endlich |
| b) $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich | $\iff \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eigentlich unendlich |
| c) $\mathcal{M}$ halbendlich | $\iff \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ halbendlich |
| d) $\mathcal{M}$ rein unendlich | $\iff \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ rein unendlich |
| e) $\mathcal{M}$ Typ I-Algebra | $\iff \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ Typ I-Algebra |
| f) $\mathcal{M}$ Typ II-Algebra | $\iff \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ Typ II-Algebra. |

Beweis: Die Behauptungen folgen sofort aus den Sätzen 1.2.15 und 1.2.23.

In [7] definiert Breuer die Indexgruppe einer von Neumann'schen Algebra. Diese Konstruktion kann auch für $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ durchgeführt werden.

Def. 1.2.25 Sei $\mathcal{M}$ eine Reelle W^* -Algebra. Für Projektionen $q \in \mathcal{M}$ und $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ definieren wir die Äquivalenzklassen

$$[q]_{\mathcal{M}} := \{ p \in \mathcal{P}\mathcal{M} \mid p \sim q \}$$

$$[g]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} := \{ h \in \mathcal{P}\mathcal{M}_{\mathbb{R}} \mid h \hat{\sim}_{\mathbb{R}} g \} .$$

Mit $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}$ bzw. $\mathcal{G}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}$ bezeichnen wir die freie abelsche Gruppe, die von den Äquivalenzklassen $[q]_{\mathcal{M}}$ bzw. $[q]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}$ in $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ endlicher Projektionen erzeugt wird. Sei $\mathcal{Q}_{\mathcal{M}}$ bzw. $\mathcal{Q}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}$ die von den Elementen $[q+p]_{\mathcal{M}} + [q]_{\mathcal{M}} + [p]_{\mathcal{M}}$, $q, p=0$, bzw. $[g+h]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} + [g]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} + [h]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}$, $g, h=0$, erzeugte Untergruppe von $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}$ bzw. $\mathcal{G}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}$.

Dann heißt

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) := \mathcal{I}_{\mathcal{M}} / \mathcal{R}_{\mathcal{M}} \quad \text{die Indexgruppe von } \mathcal{M}$$

$$\text{und } \mathcal{I}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}) := \mathcal{I}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} / \mathcal{R}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} \quad \text{die Indexgruppe von } \mathcal{M}_{\mathbb{R}}.$$

Satz 1.2.26 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\mathcal{I} : \mathcal{I}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}).$$

Beweis: Zu jeder Projektion $q \in \mathcal{M}$ gibt es eine reelle Projektion $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $g \sim q$. Wir definieren deshalb $\tilde{\mathcal{I}} : \mathcal{I}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}$ durch

$$\tilde{\mathcal{I}}([q]_{\mathcal{M}}) := [g]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}$$

Nach Satz 1.2.22 ist $\tilde{\mathcal{I}}$ wohldefiniert. Seien nun $q \in \mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}$ endliche Projektionen mit $q p = 0$ und $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine Projektion mit $q + p \sim h$. Dann existiert eine Projektion q_1 , so daß $q \sim q_1 \leq h$ ist. Nach Satz 1.2.10 gibt es dann auch eine Projektion $h_1 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mit $q_1 \sim h_1 \leq h$. Setzen wir $h_2 := h - h_1$, so ist $p \sim h_2$ und $h_1 h_2 = 0$.

Also gilt $\tilde{\mathcal{I}}([q + p]_{\mathcal{M}}) = [h]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} = [h_1]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} + [h_2]_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}$

$\tilde{\mathcal{I}}$ induziert deshalb eine Abbildung

$$\mathcal{I} : \mathcal{I}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}).$$

Die Injektivität von $\mathcal{I}$ folgt nun aus $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} \subset (\mathcal{R}_{\mathcal{M}})$

die Surjektivität aus $\mathcal{I}_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{M}}$.

q.e.d.

§ 3 über die Lage von Projektionen

In § 2 wurde gezeigt, daß es zu jeder Projektion $q \in \mathcal{M}$ einer strikt rein Reellen W^* -Algebra $\mathcal{M}$ eine reelle Projektion g mit $q \sim g$ gibt. Nun gilt für zwei beliebige Projektionen $q \in \mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}$ stets $\|q - p\| \leq 1$. Es ergibt sich deshalb die Frage, ob sich eine reelle Projektion g mit $\|q - g\| < 1$ finden läßt.

Wir beweisen zunächst ein vorbereitendes Lemma.

Lemma 1.3.1 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra und $q \in \mathcal{M}$ eine Projektion. Dann gibt es ein $w \in \mathcal{M}$ mit $w^*w = q$, $ww^* = \bar{q}$ und $w^* = \bar{w}$.

Beweis: Nach Satz 1.2.10 gibt es eine reelle Projektion g mit $g \sim q$. Es gibt deshalb $u \in \mathcal{M}$ mit $u^*u = q$, $uu^* = g$ und $\bar{u}^*\bar{u} = \bar{q}$, $\bar{u}\bar{u}^* = g$. Setzen wir nun $w := \bar{u}^*u$, so gilt $w^*w = q$, $ww^* = \bar{q}$ und $\bar{w} = u^*u = w^*$.

q.e.d.

Satz 1.3.2 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra. Dann gibt es zu jeder Projektion $q \in \mathcal{M}$ mit $q\bar{q} = 0$ eine reelle Projektion g mit $\|q - g\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Beweis: Wir wählen w wie in Lemma 1.3.1 und setzen $g := \frac{1}{2}(q + \bar{q}) + \frac{1}{2}(w + w^*)$. Wegen $w^* = \bar{w}$ ist g eine reelle Projektion. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \|q - (\frac{1}{2}(q + \bar{q}) + \frac{1}{2}(w + w^*))\| &= \frac{1}{2} \|q - \bar{q} - (w + w^*)\| \\ &= \frac{1}{2} \|(q - \bar{q} - (w + w^*)) (q - \bar{q} - (w + w^*))\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \|2 (q + \bar{q})\|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Seien nun $p, q \in \mathcal{M}$ Projektionen, für die $\|p - q\| \leq 1$ gilt. Dann ist $a := (1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2)^{-\frac{1}{2}}$ wohldefiniert. Wir setzen $v = qp - (1_{\mathcal{M}} - q)a(1_{\mathcal{M}} - p)$. zeigt in mit Hilfe dieses v , daß p und q äquivalent sind.

Lemma 1.3.3 Für das oben definierte v gilt

- a) $v = v^*$, $v^2 = 1_{\mathcal{M}}$
- b) $\frac{1+v}{2}$ ist eine Projektion
- c) $\|q - \frac{1+v}{2}\| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \|p - q\|$.

Beweis: a) Wegen $p(1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2) = pqp$ und $q(1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2) = qpq$ sind p und q mit $a = (1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2)^{-\frac{1}{2}}$ vertauschbar. Es folgt

$$\begin{aligned}
 v &= qap - (1_{\mathcal{M}} - q)a(1_{\mathcal{M}} - p) = qpa - (1_{\mathcal{M}} - q)(1_{\mathcal{M}} - p)a \\
 (1) \qquad &= qpa - (1_{\mathcal{M}} - p - q + qp)a \\
 &= (-1_{\mathcal{M}} + p + q)a
 \end{aligned}$$

und daraus

$$(2) \quad v^* = a^*(-1_{\mathcal{M}} + p + q) = (-1_{\mathcal{M}} + p + q)a = v$$

und

$$\begin{aligned}
 (3) \quad v^2 &= ((-1_{\mathcal{M}} + p + q)a)^2 = (-1_{\mathcal{M}} + p + q)^2 a^2 \\
 &= (1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2)a^2 \\
 &= 1_{\mathcal{M}}.
 \end{aligned}$$

b) Wegen $v^* = v$ ist $\frac{1}{2} (1_{\mathcal{M}} + v^*) = \frac{1}{2} (1_{\mathcal{M}} + v)$

Weiterhin gilt

$$\left(\frac{1+v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (1_{\mathcal{M}} + 2v + v^2) = \frac{1}{2} (1_{\mathcal{M}} + v)$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \left\| q - \frac{1+v}{2} \right\|^2 &= \left\| \left(q - \frac{1+v}{2} \right) \left(q - \frac{1+v}{2} \right) \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| 2q - q - qv - q - vq + 1_{\mathcal{M}} + v \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| -qv - vq + 1_{\mathcal{M}} + v \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| 1_{\mathcal{M}} - a(1_{\mathcal{M}} - q - p + pq + qp) \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| 1_{\mathcal{M}} - a(1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2) \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| 1_{\mathcal{M}} - (1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2)^{\frac{1}{2}} \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| (1_{\mathcal{M}} - (1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2)^{\frac{1}{2}}) (1_{\mathcal{M}} + (1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2)^{\frac{1}{2}})^{-1} \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| 1_{\mathcal{M}} - (1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2)^{\frac{1}{2}} \right\| \cdot \left\| (1_{\mathcal{M}} + (1_{\mathcal{M}} - (p - q)^2)^{\frac{1}{2}})^{-1} \right\| \\
 &\leq \frac{1}{2} \| p - q \|^2
 \end{aligned}$$

Es folgt $\left\| q - \frac{1+v}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \sqrt{2} \| p - q \|$.

q.e.d.

Wir betrachten nun den Spezialfall $p = \bar{q}$ und erhalten

Lemma 1.3.4 Sei $\mathcal{M}$ eine Reelle W^* -Algebra und $q, \bar{q} \in \mathcal{M}$ Projektionen mit $\| q - \bar{q} \| < 1$. Dann gibt es eine reelle Projektion $g \leq \sup(q, \bar{q})$ mit $\| q - g \| < 1$

Beweis: Setzen wir $g := \frac{1+v}{2}$, so ist wegen

$$\bar{a} = \overline{(1_{\mathcal{M}} - (q - \bar{q})^2)^{-\frac{1}{2}}} = (1_{\mathcal{M}} - (q - \bar{q})^2)^{-\frac{1}{2}} = a$$

g eine reelle Projektion, für die nach Lemma 1.3.3

$\|q - g\| < 1$ gilt. Es bleibt zu zeigen $\frac{1+v}{2} \leq \sup(q, \bar{q})$.

Zunächst folgt aus der Definition von a sofort, daß

$a \geq 1_{\mathcal{M}}$ ist. Aus (1) ergibt sich somit

$$(1+v) = 1_{\mathcal{M}} + (-1_{\mathcal{M}} + q + \bar{q})a$$

$$(4) \quad \begin{aligned} &= 1_{\mathcal{M}} - a + (q + \bar{q})a \\ &\leq (q + \bar{q})a \end{aligned}$$

und weiter

$$(5) \quad \frac{1+v}{2} = s(1+v) \leq s((q + \bar{q})a) \leq s(q + \bar{q})$$

Nun gilt für beliebige Projektionen $p, q \in \mathcal{M}$ stets

$s(p+q) = \sup(p, q)$, also insbesondere $s(q + \bar{q}) = \sup(q, \bar{q})$.

Die Behauptung folgt deshalb sofort aus (5).

q.e.d.

Als weiteren Sonderfall erhalten wir für $p = 1_{\mathcal{M}} - \bar{q}$

Lemma 1.3.5 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra, $q \in \mathcal{M}$ eine Projektion mit $\|q - (1_{\mathcal{M}} - \bar{q})\| < \delta < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dann gibt es eine reelle Projektion g mit $\|q - g\| < 1$.

Beweis: Wir wählen v wie in Lemma 1.3.3, das heißt

$$a = (1_{\mathcal{M}} - (q - (1_{\mathcal{M}} - \bar{q}))^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ und } v = qa(1_{\mathcal{M}} - \bar{q}) + (1_{\mathcal{M}} - q)a\bar{q}.$$

Nach Lemma 1.3.3 ist $\|q - \frac{1}{2}(1_{\mathcal{M}} + v)\| < \delta$. Aus der Definition von a folgt $\bar{a} = a$. Weiterhin gilt wegen

$v = a + qa + (1_{\mathcal{M}} - \bar{q})a = qa - \bar{q}a$, daß $\bar{v} = -v$ ist. Somit haben wir

$$(6) \quad \frac{1}{2}(1_{\mathcal{M}} + v) \overline{\frac{1}{2}(1_{\mathcal{M}} + v)} = \frac{1}{4}(1_{\mathcal{M}} + v)(1_{\mathcal{M}} - v) = 0.$$

Wir können deshalb auf die Projektion $\frac{1}{2}(1_{\mathcal{M}} + v)$ Satz 1.3.2 anwenden, nach dem es eine reelle Projektion $g \in \mathcal{M}$ mit

$$(7) \quad \left\| \frac{1}{2}(1_{\mathcal{M}} + v) - g \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

gibt, wegen

$$\|q-g\| \leq \|q - \frac{1}{2}(1_{\mathcal{H}} + v)\| + \|\frac{1}{2}(1_{\mathcal{H}} + v) - g\| \leq \delta + \frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$$

ist g die gesuchte reelle Projektion.

q.e.d.

Als Nächstes benötigen wir ein Kriterium das angibt, welche Projektionen einen Abstand kleiner als Eins haben.

Lemma 1.3.6 Es seien $p, q \in P\mathcal{M}$. Für $0 < \varepsilon < 1$ sei $pqp \geq \varepsilon p$ und $qpq \geq \varepsilon q$. Dann ist $\|p-q\| < 1$.

Beweis: Durch vollständige Induktion bestätigt man für $k \geq 2$ leicht die folgende Identität

$$(8) \quad (p-q)^{2^k} = \left((p(1_{\mathcal{H}}-q)p)^{2^{k-1}} (1_{\mathcal{H}}-q) \right) + \left((q(1_{\mathcal{H}}-p)q)^{2^{k-1}} (1_{\mathcal{H}}-p) \right)$$

Aus $pqp \geq \varepsilon p$ und $qpq \geq \varepsilon q$ folgt

$p(1_{\mathcal{H}}-q)p \leq (1-\varepsilon)p$ und $q(1_{\mathcal{H}}-p)q \leq (1-\varepsilon)q$. Zusammen mit (8) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|p-q\|^{2^k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|(p-q)^{2^k}\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|(p(1_{\mathcal{H}}-q)p)^{2^{k-1}}(1_{\mathcal{H}}-q) + (q(1_{\mathcal{H}}-p)q)^{2^{k-1}}(1_{\mathcal{H}}-p)\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|(p(1_{\mathcal{H}}-q)p)^{2^{k-1}}\| \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \|(q(1_{\mathcal{H}}-p)q)^{2^{k-1}}\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1_{\mathcal{H}} - \varepsilon)^{2^{k-1}} + \lim_{k \rightarrow \infty} (1_{\mathcal{H}} - \varepsilon)^{2^{k-1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also muß $\|p-q\| < 1$ sein.

q.e.d.

Wir sind nun in der Lage das Hauptergebnis dieses Paragraphen zu beweisen.

Satz 1.3.7 Sei $\mathcal{M}$ eine strikt rein Reelle W^* -Algebra und $q \in \mathcal{M}$ eine Projektion. Dann gibt es eine reelle Projektion g mit $\|q - g\| < 1$.

Beweis: Im Fall $q\bar{q} = 0$ sind wir nach Satz 1.3.2 fertig. Sei deshalb $q\bar{q} \neq 0$ und

$$(8) \quad q\bar{q} = u \cdot |q\bar{q}|$$

die Polarzerlegung von $q\bar{q}$. Weil $\mathcal{M}$ strikt rein Reell ist, gilt

$$(9) \quad 1_{\mathcal{M}-r(q,\bar{q})} \sim 1_{\mathcal{M}-r(q\bar{q})} = 1_{\mathcal{M}} - 1(q\bar{q}).$$

Also gibt es ein $v \in \mathcal{M}$ mit

$$(10) \quad v^*v = 1_{\mathcal{M}-r(q\bar{q})}, \quad vv^* = 1_{\mathcal{M}-1(q\bar{q})}$$

Aus (8) und (10) folgt nun

$$(11) \quad (u+v) |q\bar{q}| (u^*+v^*) = |(q\bar{q})^*| = |\bar{q}q|$$

Sei

$$(12) \quad |q\bar{q}| = \int_0^\infty \lambda \, d\epsilon(\lambda)$$

die Spektraldarstellung von $|q\bar{q}|$; dann gilt wegen (11)

$$(13) \quad |\bar{q}q| = \int_0^\infty \lambda \, d((u+v)\epsilon(\lambda)(u^*+v^*))$$

Andererseits folgt aber aus der starken Stetigkeit von $\bar{}$

$$(14) \quad |\bar{q}q| = \int_0^\infty \overline{\lambda \, d\epsilon(\lambda)}$$

Da die Spektraldarstellung eindeutig ist [26, 1.11.3], muß

$$(15) \quad \overline{\epsilon(\lambda)} = (u+v)\epsilon(\lambda)(u^*+v^*)$$

gelten. Setzen wir für hinreichend kleines $\delta > 0$

$\bar{q}_1 := 1_{\mathcal{M}-\epsilon(\delta)} > 0$, so gilt

$$\bar{q}_1 \leq r(q\bar{q}) \leq \bar{q}$$

$$q_1 = (u+v)\bar{q}_1(u^*+v^*) = u\bar{q}_1u^* \leq 1(q\bar{q}) \leq q$$

und

$$(16) \quad q_1\bar{q}_1 = q_1q\bar{q}\bar{q}_1 = q_1u|q\bar{q}|\bar{q}_1 = u\bar{q}_1|q\bar{q}| = u \int_\delta^\infty \lambda \, d\epsilon(\lambda).$$

Es folgt somit $q_1 \bar{q}_1 q_1 \geq \delta q_1$ und $\bar{q}_1 q_1 \bar{q}_1 \geq \delta \bar{q}_1$. Also gilt nach Lemma 1.3.6

$$(17) \quad \|q_1 - \bar{q}_1\| < 1;$$

setzen wir $q_2 := q - q_1$, so ergibt sich

$$q_2 \cdot \bar{q}_1 = q_2 \cdot q \bar{q} \bar{q}_1 = q_2 q_1 q \bar{q} = 0 \quad \text{und damit}$$

$$(18) \quad \sup(q_2, \bar{q}_2) \sup(q_1, \bar{q}_1) = 0$$

Aus der Beziehung $\bar{q}_2 = \bar{q} - \bar{q}_1 \in \mathcal{M} - \bar{q}_1 = e(\delta)$ erhalten wir

$$(19) \quad \|q_2 \bar{q}_2\| = \|q_2 q \bar{q} \bar{q}_2\| = \|q_2 q \bar{q} e(\delta) \bar{q}_2\| \leq e(\delta)$$

Nun setzen wir $x := (\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2) \bar{q}_2$, dann gilt wegen $x^*x = \bar{q}_2(\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2) \bar{q}_2 = \bar{q}_2 - \bar{q}_2 q_2 \bar{q}_2 \geq (1 - \delta^2) \bar{q}_2$, da

$$r(x) = \bar{q}_2 \quad \text{und} \quad |x| \geq (1 - \delta^2)^{\frac{1}{2}} \bar{q}_2 \quad \text{ist.}$$

Sei $p' := \sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2 - 1(x)$, dann folgt $0 = p'x = p' \bar{q}_2$, d.h. $p'(q_2 + \bar{q}_2) = 0$. Also ist auch

$$(20) \quad 0 = p'(q_2 + \bar{q}_2) = p' \sup(q_2, \bar{q}_2) = p'$$

Ist nun $x = v|x|$ die Polarzerlegung, so wird

$$\begin{aligned} (\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2) \bar{q}_2 (\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2) &= x x^* = v |x|^2 v^* \\ &\geq (1 - \delta^2) v r(x) v^* = (1 - \delta^2) 1(x) = (1 - \delta^2) (\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} (21) \quad (\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2) (\sup(q_2, \bar{q}_2) - \bar{q}_2) (\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2) \\ \leq \delta^2 (\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2) \end{aligned}$$

Setzen wir $\tilde{q}_2 := \sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2$, dann ist

$$\|\bar{q}_2 - \tilde{q}_2\| = \|\bar{q}_2 - (\sup(q_2, \bar{q}_2) - q_2)\| \leq \delta.$$

Wenden wir Lemma 1.3.5 auf die reduzierte Algebra $\sup(q, \bar{q}) / \mathcal{M} \sup(q, \bar{q})$ an, so erhalten wir eine reelle Projektion g_2 mit

$$(22) \quad \|q_2 - g_2\| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} + \delta < 1$$

für kleines δ . Nach Lemma 1.3.4 gibt es eine reelle Projektion g_1 mit

$$(23) \quad \|q_1 - g_1\| < 1, \quad g_1 \leq \sup(q_1, \bar{q}_1)$$

Also ist

$$(24) \quad \|q - (g_1 + g_2)\| = \max(\|q_1 - g_1\|, \|q_2 - g_2\|) < 1$$

$g_1 + g_2$ ist somit die gesuchte reelle Projektion.

q.e.d.

Kapitel II Vektorbündel mit Strukturgruppe in von Neumann'schen Algebren.

Sei $\mathcal{M}$ eine komplexe von Neumann'sche Algebra. In [9] entwickelt Breuer eine Theorie von $\mathcal{M}$ -Vektorbündeln mit Strukturgruppe in $\mathcal{M}$. Er erhält Ergebnisse, die zu denen in [3] ähnlich sind. Insbesondere existiert die Grothendieckgruppe $K_{\mathcal{M}}(X)$, wobei X ein topologischer Raum ist. Sei $\mathcal{FM}$ die Menge der Fredholmoperatoren [7] von $\mathcal{M}$, und $[X, \mathcal{FM}]$ die Menge der Homotopieklassen von X in $\mathcal{FM}$. Dann wird in [9] gezeigt, daß es einen Isomorphismus

$$[X, \mathcal{FM}] \cong K_{\mathcal{M}}(X)$$

gibt. Dieser Satz ist das Analogon zu dem Satz von Atiyah - Jänich 20.

Sei nun $\mathcal{M}$ eine reelle von Neumann'sche Algebra und $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung. Da $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ insbesondere eine komplexe von Neumann'sche Algebra ist, können wir $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel betrachten, die jedoch zusätzlich eine von der Abbildung $\tau: \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ induzierte Struktur haben. Wir gehen dann wie in [9] vor und erhalten eine Art "equivariante" Theorie von $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündeln. Insbesondere existiert die Gruppe $KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(X)$ und wir konstruieren den Isomorphismus

$$[X, \mathcal{FM}_{\mathbb{C}}] \hat{=} KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(X).$$

Wir bemerken noch, daß die grundlegenden Tatsachen über Bündel mit einer Strukturgruppe dem Buch von Steenrod [29] entnommen werden können.

Es werden auch weitgehend die Bezeichnungen von Steenrod beibehalten.

§ 1 Definition von reellen, komplexen und Reellen $\mathcal{M}$ -Vektorbündeln und ihren Morphismen; das Graßmannvektorbündel.

Wir definieren zunächst reelle bzw. komplexe $\mathcal{M}$ -Vektorbündel wie Breuer in [9] .

Sei $\mathcal{H}$ ein reeller bzw. komplexer Hilbertraum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine reelle bzw. komplexe von Neumann'sche Algebra (vgl. § 0). Weiterhin seien ξ und X topologische Räume und $p_\xi : \xi \rightarrow X$ eine stetige surjektive Abbildung

Es gelte:

(VB 1)

$\xi_x := p^{-1}(x)$ ist für jedes $x \in X$ ein reeller bzw. komplexer Hilbertraum; es gibt eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X , eine Familie von Projektionen $\{E_i\}_{i \in I}$ von $\mathcal{M}$ und Homöomorphismen

$$\varphi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times E_i(\mathcal{H})$$

(VB 2)

seien $q_i : U_i \times E_i(\mathcal{H}) \longrightarrow U_i$, $p_i : U_i \times E_i(\mathcal{H}) \longrightarrow E_i(\mathcal{H})$ die natürlichen Projektionen und sei

$$\varphi_{i,x} := p_i \circ \varphi_i|_{\xi_x}$$

dann gilt: $q_i \circ \varphi_i = p_\xi|_{p^{-1}(U_i)}$ und φ_i induziert den isometrischen Isomorphismus

$$\varphi_{i,x} : \xi_x \longrightarrow E_i(\mathcal{H})$$

für jedes $x \in U_i$, $i \in I$;

(VB 3)

definieren wir $g_{ij}(x)$ durch

$$g_{ij}(x)(v) := \varphi_{i,x} \varphi_{j,x}^{-1} E_j(v) \quad x \in U_i \cap U_j, \quad v \in \mathcal{H}$$

so ist $x \mapsto g_{ij}(x)$ eine stetige Abbildung von $U_i \cap U_j$ in $\mathcal{M}$.

Eine Familie $(U_i, \varphi_i, E_i)_{i \in I}$, die den Bedingungen VB 1) - VB 3)

genügt, heißt ein $\mathcal{M}$ -Atlas; jedes Element dieser Familie eine Karte. Zwei $\mathcal{M}$ -Atlanten sind äquivalent wenn ihre Vereinigung ebenfalls ein $\mathcal{M}$ -Atlas ist. Die Äquivalenzklasse eines $\mathcal{M}$ -Atlanten heißt ein reelles bzw. komplexes $\mathcal{M}$ -Vektorbündel, mit ξ als Totalraum, p_ξ als Projektion und X als Basisraum.

$\mathcal{M}$ -Vektorbündel werden wir mit den Buchstaben $\xi, \eta, \dots$ bezeichnen.

Bevor wir fortfahren verallgemeinern wir den Begriff "Reell" aus Kapitel I.

Def. 2.1.1 Sei X ein topologischer Raum. X heißt ein Reeller Raum, wenn es einen Homöomorphismus $\tau: X \rightarrow X$ mit $\tau^2 = \text{id}_X$ gibt. τ heißt eine Involution von X . Einen Punkt $x \in X$, für den $\tau(x) = x$ gilt, nennen wir Reell.

Ist X ein Reeller Raum und $\tau: X \rightarrow X$ die Involution, so schreiben wir einfach $\tau(x) = \bar{x}$, falls keine Verwechslungen möglich sind.

Def. 2.1.2 Seien X und Y Reelle Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann heißt f Reell, wenn $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$ für alle $x \in X$ gilt.

Sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine reelle von Neumann'sche Algebra. Dann sind die Komplexifizierungen $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ und $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ Reelle Räume. Bevor wir Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel definieren, sei daran erinnert, daß $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ eine komplexe von Neumann'sche Algebra ist; $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel also schon definiert sind.

Def. 2.1.3 Sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine reelle von Neumann'sche Algebra. Dann ist ein Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel ein $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften.

(VBR1)

ξ und X sind Reelle Räume und es gilt $p(\bar{v}) = \overline{p(v)}$, $v \in \xi$, d.h. p ist Reell.

(VBR2)

a) Für jedes $x \in X$ ist $\bar{\cdot}: \xi_x \rightarrow \bar{\xi}_x$ ein antilinearer Isomorphismus.

b) Bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ das Skalarprodukt des Hilbert-raumes ξ_x , so gilt für $v, w \in \xi_x$

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle_{\bar{\xi}_x} = \overline{\langle v, w \rangle_x}$$

(VBR3)

Es gibt einen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Atlas $(U_i, \varphi_i, G_i)_{i \in I}$, so daß gilt:

a) $\bar{U}_i = \{ \bar{x} \mid x \in U_i \} \simeq U_i$,

b) G_i ist eine reelle Projektion, d.h. $\bar{G}_i = G_i$ für alle $i \in I$

c) die Abbildungen $\bar{\cdot}: \xi \rightarrow \bar{\xi}$ und $\bar{\cdot}: G_i(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}) \rightarrow G_i(\mathcal{K}_{\mathbb{C}})$ sind miteinander verträglich, d.h.

$$\varphi_{i, \bar{x}}(\bar{v}) = \overline{\varphi_{i, x}(v)} \quad , \quad x \in U_i, v \in \xi_x$$

für alle $i \in I$.

Wir nennen einen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Atlas, der VBR 1 - VBR 3 erfüllt, kurz Reell. Die Äquivalenzklasse eines Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Atlanten heißt nun ein Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel.

Reelle Vektorbündel - wobei "Vektorbündel" im Sinne von [1] zu verstehen ist - wurden zum erstenmal von Atiyah in [4] betrachtet, der sie unter anderem dazu benutzte den reellen Periodizitätssatz zu beweisen. 2.1.2 ist eine Verallgemeinerung der dortigen Definition.

Als Nächstes geben wir das in der gesamten Theorie wichtigste Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel an.

Def. 2.1.4 Sei $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ eine rein Reelle halbendliche von Neumannsche Algebra, und $E \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ eine endliche Projektion.

Wir verstehen

$$\mathcal{G}_E := \left\{ F \in \mathcal{PM}_c \mid F \sim E \right\}$$

mit der Normtopologie und

$$\mathcal{L}_E := \left\{ (F, v) \in \mathcal{G}_E \times \mathcal{H}_c \mid F(v) = v \right\}$$

mit der von $\mathcal{G}_E \times \mathcal{H}_c$ induzierten Topologie. $\mathcal{G}_E$ heißt die Graßmann'sche von E .

Wir bemerken, daß $\mathcal{G}_E$ nach Lemma 1.2.3 ein Reeller Raum ist. $\mathcal{G}_E \times \mathcal{H}_c$ trägt die von $\mathcal{G}_E$ bzw. $\mathcal{H}_c$ induzierte Reelle Struktur; somit ist auch $\mathcal{G}_E \times \mathcal{H}_c$ ein Reeller Raum.

Sei $p : \mathcal{G}_E \times \mathcal{H}_c \longrightarrow \mathcal{G}_E$ die natürliche Projektion.

Satz 2.1.5 Sei $\mathcal{M}_c$ eine strikt rein Reelle halbendliche, von Neumann'sche Algebra. Dann ist $\mathcal{A}_E$ ein Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel mit dem Basisraum $\mathcal{G}_E$ und der Projektion p .

Beweis: Sei $(F, v) \in \mathcal{G}_E$. Wegen $\overline{F(v)} = \overline{F(v)}$ (Satz 1.0.3 e) gilt $(\overline{F}, \overline{v}) = (\overline{F}, \overline{v}) \in \mathcal{L}_E$, so daß $\mathcal{L}_E$ ebenfalls ein Reeller Raum ist. (VBR 1) ist erfüllt, denn

$$p(\overline{F}, \overline{v}) = p(\overline{F}, \overline{v}) = \overline{F} = \overline{p(F, v)}$$

(VBR 2) gilt nach Satz 1.0.3. Wir konstruieren nun für $\mathcal{G}_F$ einen Reellen Atlas.

Sei $G \in \mathcal{G}_E$ eine reelle Projektion und sei

$$\mathcal{N}_G := \left\{ F \in \mathcal{G}_E \mid \|G - F\| < 1 \right\}.$$

Weil $\cdot : \mathcal{G}_E \longrightarrow \mathcal{G}_E$ eine Isometrie ist, gilt

$$\overline{\mathcal{N}_G} = \left\{ F \in \mathcal{G}_E \mid \overline{F} \in \mathcal{N}_G \right\} \subset \mathcal{N}_G. \text{ Weiterhin folgt aus}$$

Satz 1.3.7, daß $\{\mathcal{N}_G\}_{G \in \mathcal{PM}}$ eine Überdeckung von $\mathcal{G}_E$ ist.

Für $F \in \mathcal{N}_G$ sei

$$GF = v_{GF} |GF|$$

die Polarzerlegung von GF . $F \in \mathcal{N}_G$ zieht nach sich, daß

$$G = V_{GF} V_{GF}^* \quad , \quad F = V_{GF}^* V_{GF}$$

und daß

$$F \longmapsto V_{GF}$$

eine stetige Abbildung von $\mathcal{V}_G$ in $\mathcal{M}_e$ ist [21, § 105].

Definieren wir nun

$$\gamma_G : P^{-1}(\mathcal{V}_G) \longrightarrow \mathcal{V}_G \times G(\mathbb{R}_e)$$

durch

$$\gamma_G(F, v) := (F, V_{GF} v)$$

so ist $(\mathcal{V}_G, \gamma_G, G)_{G \in PM}$ offenbar ein $\mathcal{M}_e$ -Atlas für $\mathcal{G}_E$.

Wir müssen nun nur noch die Bedingung VBR 3c verifizieren. Zunächst wissen wir nach Corollar 1.1.7, daß

$$G\overline{F} = \overline{V_{GF}} |G\overline{F}|$$

die Polarzerlegung von $G\overline{F}$ ist. Aus der Eindeutigkeit der Polarzerlegung folgt dann

$$\overline{V_{GF}} = V_{G\overline{F}}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \gamma_G(\overline{F, v}) &= (\overline{F}, V_{G\overline{F}}(\overline{v})) = (\overline{F}, \overline{V_{GF}}(\overline{v})) = \overline{(F, V_{GF}(v))} \\ &= \overline{\gamma_G(F, v)} \end{aligned}$$

q.e.d.

Das Reelle $\mathcal{M}_e$ -Vektorbündel $\mathcal{G}_E$ heißt das Graßmannbündel von E . Falls $E \sim F$ gilt, sind die Graßmannvektorbündel von E und F gleich.

Def. 2.1.6 Sei $\mathcal{M}$ eine reelle bzw. komplexe von Neumann'sche Algebra und ξ, ξ' reelle bzw. komplexe $\mathcal{M}$ -Vektorbündel mit demselben Basisraum X .

Eine Abbildung $T: \xi \rightarrow \xi'$ heißt ein $\mathcal{M}$ -Morphismus, wenn gilt:

(Mor 1) $p_{\xi'} \circ T = p_{\xi}$ und $T_x := T|_{\xi_x}$ induziert eine partielle Isometrie von ξ_x in ξ'_x

(Mor 2) seien $(U_i, \varphi_i, E_i)_{i \in I}$, $(U'_j, \varphi'_j, E'_j)_{j \in J}$ $\mathcal{M}$ -Atlanten von ξ, ξ' . Für jedes $x \in U_i \cap U'_j$ definieren wir $T_{ij,x} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ durch

$$T_{ij,x}(v) := \varphi_{i,x} T_x \varphi_{j,x}^{-1} E_j(v) \quad v \in \mathcal{H}$$

Dann ist $x \mapsto T_{ij,x}$ eine stetige Abbildung von $U_i \cap U'_j$ in $\mathcal{M}$.

Die $\mathcal{M}$ -Vektorbündel ξ und ξ' heißen $\mathcal{M}$ -isomorph, wenn es einen $\mathcal{M}$ -Isomorphismus $T: \xi \rightarrow \xi'$ gibt.

Sind ξ, ξ' Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel mit demselben Reellen Basisraum X , so heißt $T: \xi \rightarrow \xi'$ ein Reeller $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Morphismus, wenn (Mor 1), (Mor 2) und die Verträglichkeitsbedingung

$$T(\bar{v}) = \overline{T(v)} \quad v \in \xi$$

erfüllt sind.

Zwei $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel ξ, ξ' über demselben Reellen Raum X heißen Reell $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -isomorph, wenn es einen Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Isomorphismus $T: \xi \rightarrow \xi'$ gibt.

Falls ξ ein Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel mit dem Reellen Atlas $(U_i, \varphi_i, G_i)_{i \in I}$ ist, so sind die Trivialisierungen φ_i im Sinne von Def. 2.1.5 Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Morphismen von $p^{-1}(U_i)$ in $U_i \times G_i(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$.

Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel treten auf natürliche Weise als Komplexifizierung von reellen $\mathcal{M}$ -Vektorbündeln auf, sofern die Involution auf dem Basisraum die Identität ist. Wir präzisieren dies nun.

Sei X ein Reeller Raum dessen Involution $\bar{}$ trivial ist, d.h. $\bar{x} = x$ für alle $x \in X$, und sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathbb{K})$ eine reelle von Neumann'sche Algebra. $\mathcal{F}$ bezeichne die Kategorie, deren Objekte reelle $\mathcal{M}$ -Vektorbündel über X und deren Morphismen reelle $\mathcal{M}$ -Morphismen sind; $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ bezeichne die Kategorie, deren Objekte Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über X und deren Morphismen Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Morphismen sind.

Satz 2.1.7 Sei X ein Reeller Raum, dessen Involution trivial ist, und $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathbb{K})$ eine reelle von Neumann'sche Algebra. Dann gibt es Funktoren

$$F : \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{F}$$

und

$$G : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$$

so daß $FG(\xi) \cong \xi$ für alle $\xi \in \mathcal{F}$ und $GF(\eta) \cong \eta$ für alle $\eta \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ gilt.

Beweis: Sei zunächst $\eta \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ und $(U_i, \varphi_i, G_i)_{i \in I}$ ein Reeller $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Atlas von η . Wir setzen nun

$$F(\eta) := \left\{ v \in \eta \mid v = \bar{v} \right\}$$

Wegen (VBR 2) ist $(F(\eta))_x$ für jedes $x \in X$ ein reeller Hilbertraum. Die Projektion $p : \eta \rightarrow X$ induziert eine stetige Abbildung $p_F(\eta) := p|_{F(\eta)}$. G_i ist für alle $i \in I$ eine reelle Projektion, daher gilt

$$G_i(\eta) = \left\{ w \in G_i(\eta_{\mathbb{C}}) \mid \bar{w} = w \right\}.$$

Wir müssen zeigen, daß

$$\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G_i(\eta_{\mathbb{C}})$$

einen Homöomorphismus

$$\tilde{\varphi}_i : F(\eta) \cap p_{\eta}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G_i(\mathcal{H})$$

induziert. Dies folgt aber sofort aus

$$\overline{\varphi_i(v)} = \varphi_i(\overline{v}) = \varphi_i(v) \quad v \in F(\eta) \cap p_{\eta}^{-1}(U_i)$$

Also ist (VB 1) erfüllt. Sei nun $x \in U_i \cap U_j$ und $v \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Dann gilt wegen

$$\begin{aligned} g_{ij}(x)(\overline{v}) &= \varphi_{i,x} \varphi_{j,x}^{-1} G_j(\overline{v}) = \varphi_{i,x} \varphi_{j,x}^{-1} (\overline{G_j(v)}) \\ &= \overline{\varphi_{i,x} \varphi_{j,x}^{-1} G_j(v)} = \overline{g_{ij}(x)(v)} = \overline{g_{ij}(x)(\overline{v})} \end{aligned}$$

$g_{ij}(x) = \overline{g_{ij}(x)} \in \mathcal{M}$. Also ist $(U_i, \varphi_i|_{F(\eta)}, G_i)_{i \in I}$

ein reeller $\mathcal{M}$ -Atlas für $F(\eta)$. Weiterhin sieht man leicht, daß F Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Morphismen auf reelle $\mathcal{M}$ -Morphismen abbildet.

Sei nun $\xi \in \mathcal{F}$ und $(U_i, \psi_i, H_i)_{i \in I}$ ein reeller $\mathcal{M}$ -Atlas. Wir setzen

$$G(\xi) := \bigcup_{x \in X} (\eta_x)_{\mathbb{C}} := \xi_{\mathbb{C}}$$

$\psi_{i,x} : \xi_x \longrightarrow H_i(\mathcal{H})$, und damit auch ψ_i , kann auf eindeutige Weise zu einem Isomorphismus $(\psi_{i,x})_{\mathbb{C}} : (\xi_x)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} H_i(\mathcal{H})_{\mathbb{C}} =$

$= H_i(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ fortgesetzt werden. Wir versehen nun

$G(\xi)|_{U_i}$ mit der Topologie, die $(\psi_i)_{\mathbb{C}}$ zu einem Homöomorphismus macht und $G(\xi)$ mit der schwachen Topologie bezüglich der offenen Mengen $G(\xi)|_{U_i}$.

Offensichtlich wird durch $\xi_{\mathbb{C}} \longrightarrow \xi_{\mathbb{C}}$,

$v_1 \otimes 1 + iv_2 \otimes 1 = v_1 \otimes 1 - iv_2 \otimes 1$ auf $\xi_{\mathbb{C}}$ eine Involution erklärt, so daß $\xi_{\mathbb{C}}$ ein Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel mit dem Reellen Atlas $(U_i, (\psi_i)_{\mathbb{C}}, G_i)_{i \in I}$ ist.

Ähnlich wie ψ_i läßt sich auch jeder reelle $\mathcal{M}$ -Morphismus zu einem Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Morphismus fortsetzen.

Aus der Konstruktion von F bzw. G folgt sofort, daß

$GF(\eta) \cong \eta$ und $FG(\xi) \cong \xi$ gilt.

q.e.d.

Mit Hilfe des letzten Satzes können Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über einem topologischen Raum X dessen Involuktion trivial ist mit reellen $\mathcal{M}$ -Vektorbündeln identifiziert werden. Da andererseits jedes Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel insbesondere ein komplexes $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel ist, erscheint es sinnvoll, im Folgenden nur noch Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel zu betrachten.

Eng verknüpft mit Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündeln sind die Homomorphismenbündel, die jedoch nur noch Banachbündel sind. Die grundlegenden Tatsachen über Banachbündel können dem Buch von Lang [19] entnommen werden.

Def. 2.1.8 Sei Ξ ein Banachbündel über X , $p : \Xi \rightarrow X$ die Projektion. Ξ ist ein Reelles Banachbündel, wenn es einen Atlas $(U_i, \Phi_i, \mathcal{N}_i)_{i \in I}$ gibt derart, daß

- X und $U_i, \mathcal{N}_i$ für alle $i \in I$ Reelle Räume sind,
- $p : \Xi \rightarrow X$ und $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathcal{N}_i$, $i \in I$ sind Reelle Abbildungen.

Seien ξ, η Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über demselben Reellen Raum X und seien $(U_i, \varphi_i, G_i)_{i \in I}$ bzw. $(U_i, \psi_i, H_i)_{i \in I}$ Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Atlanten von ξ bzw. η . Für $x \in U_i$ setzen wir nun

$$\text{Hom}(\xi_x, \eta_x) := \left\{ \varphi_{i,x}^{-1} \varphi_{i,x}^T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \right\}$$

Man überprüft sofort, daß $\text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ nicht von der Wahl der Atlanten abhängt. Sei

$$\text{Hom}(\xi, \eta) := \bigcup_{x \in X} \text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$$

Satz 2.1.9 $\text{Hom}(\xi, \eta)$ ist ein Reelles Banachbündel über X .

Beweis: $\text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ ist offenbar ein linearer Teilraum von $\mathcal{X}(\xi_x, \eta_x)$. Wir definieren nun für $x \in U_i$ eine Abbildung

$$\tilde{\varphi}_{i,x} : \text{Hom}(\xi_x, \eta_x) \longrightarrow H_i \mathcal{M}_{\mathbb{C}} G_i$$

durch

$$\tilde{\varphi}_{i,x} T_x(v) := \varphi_{i,x} T_x \varphi_{i,x}^{-1} G_i(v) \quad v \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, T_x \in \text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$$

$\tilde{\varphi}_{i,x}$ ist ein Spatialisomorphismus und damit schwach stetig. Also ist $\text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ ein schwachabgeschlossener und daher auch normalabgeschlossener Unterraum von $\mathcal{X}(\xi_x, \eta_x)$; insbesondere ist $\text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ ein Banachraum.

Sei

$$p_{\text{Hom}} : \text{Hom}(\xi, \eta) \longrightarrow X$$

die natürliche Projektion. Dann definieren wir die Abbildung

$$\tilde{\varphi} : p_{\text{Hom}}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times H_i \mathcal{M}_{\mathbb{C}} G_i$$

faserweise durch

$$\tilde{\varphi}_i(T_x) := (x, \tilde{\varphi}_{i,x} T_x) \quad T_x \in \text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$$

Wir versehen $p_{\text{Hom}}^{-1}(U_i)$ mit der Topologie, die $\tilde{\varphi}_i$ zu einem Homöomorphismus macht, und $\text{Hom}(\xi, \eta)$ mit der schwachen Topologie bezüglich der offenen Mengen $p_{\text{Hom}}^{-1}(U_i)$, $i \in I$. Diese Topologie ist wohldefiniert, weil die Abbildungen $x \longrightarrow \varphi_{i,x} \varphi_{j,x}^{-1} G_j$ und $x \longmapsto \varphi_{i,x} \varphi_{j,x}^{-1} H_j$ nach Voraussetzung stetig sind.

Somit ist $\text{Hom}(\xi, \eta)$ ein Banachbündel mit dem Atlas $(U_i, \tilde{\varphi}_i, H_i \mathcal{M}_{\mathbb{C}} G_i)_{i \in I}$.

Sei $T_x = \varphi_{i,x}^{-1} T \varphi_{i,x} \in \text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$. Dann ist

$$\overline{T_x} := \varphi_{i,\bar{x}}^{-1} \overline{T} \varphi_{i,\bar{x}} \in \text{Hom}(\xi_{\bar{x}}, \eta_{\bar{x}})$$

wohldefiniert, weil die Atlanten von ξ bzw. η reell sind. Die so definierte Involution auf $\text{Hom}(\xi, \eta)$ ist mit denen

von ξ bzw. η verträglich, denn es gilt für $v \in \xi_{\bar{x}}$

$$\overline{T_x}(v) = \psi_{i,\bar{x}}^{-1} \overline{T} \psi_{i,\bar{x}}(v) = \overline{\psi_{i,x}^{-1} T \psi_{i,x}(\bar{v})} = \overline{T_x(\bar{v})}$$

Man sieht leicht, daß $\overline{} : \text{Hom}(\xi_x, \eta_x) \rightarrow \text{Hom}(\xi_{\bar{x}}, \eta_{\bar{x}})$ antilinear und isometrisch ist. Sei nun $(x, T) \in U_1 \times H_1 \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{G_1}$. Dann gilt $\overline{\vartheta_1 \circ T \circ \vartheta_1^{-1}}(x, T) = (\bar{x}, \overline{\vartheta_1 \circ T \circ \vartheta_1^{-1}}) = (\bar{x}, \bar{T})$

Also ist

$$\overline{\vartheta_1 \circ T \circ \vartheta_1^{-1}} : U_1 \times H_1 \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{G_1} \longrightarrow U_1 \times H_1 \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{G_1}$$

ein Homöomorphismus und damit auch

$$\overline{} : \text{Hom}(\xi, \eta) \longrightarrow \text{Hom}(\xi, \eta).$$

Weiterhin folgt aus der Definition von $\overline{}$ sofort, daß

$$\overline{\vartheta_1(\bar{T})} = \overline{\vartheta_1(T)} \quad T \in \text{Hom}(\xi, \eta)$$

gilt. Daher ist $\text{Hom}(\xi, \eta)$ ein Reelles Banachbündel über X .

q.e.d.

Sei nun ξ', η' ein weiteres Paar von Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündeln über X und seien

$$V : \xi \longrightarrow \xi' \quad , \quad W : \eta \longrightarrow \eta'$$

Reelle Morphismen. Sei

$$(V, W)_x^{\#} : \text{Hom}(\xi_x, \eta_x) \longrightarrow \text{Hom}(\xi'_x, \eta'_x)$$

durch

$$(V, W)_x^{\#} T_x = W_x T_x V_x^* \quad T_x \in \text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$$

definiert, und sei

$$(V, W)^{\#} : \text{Hom}(\xi, \eta) \longrightarrow \text{Hom}(\xi', \eta')$$

diejenige Abbildung, deren Einschränkung auf $\text{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ durch $(V, W)_x^{\#}$ gegeben ist. Dann ist $(V, W)^{\#}$ eine Reelle Abbildung.

Im Weiteren sind wir hauptsächlich an dem Fall $\xi = \eta$ interessiert. Wir schreiben dann abkürzend

$$\text{end } \xi : = \text{Hom}(\xi, \xi)$$

und nennen $\text{end } \xi$ das Endomorphismenbündel von ξ . Die Faser $(\text{end } \xi)_x$ von $\text{end } \xi$ bei $x \in X$ ist isomorph zu einer reduzierten Reellen von Neumann'schen Algebra. Insbesondere ist $(\text{end } \xi)_x$ eine C^* -Algebra. Bei dieser Gelegenheit führen wir C^* -Algebrabündel ein.

Def. 2.1.9 Sei ξ ein Banachbündel über X , $p_\xi : \xi \rightarrow X$ die Projektion. ξ ist ein C^* -Algebrabündel, wenn gilt

- a) $\xi_x = p^{-1}(x)$ ist für alle $x \in X$ eine komplexe C^* -Algebra
- b) Es gibt einen Atlas $(U_i, \vartheta_i, \mathcal{H}_i)_{i \in I}$ derart, daß alle $\mathcal{H}_i$ komplexe C^* -Algebren sind und die Abbildung

$$\vartheta_{i,x} : \xi_x \rightarrow \mathcal{H}_i \quad x \in U_i$$

ein C^* -Algebrahomomorphismus ist.

Ein C^* -Algebrabündel, das zugleich auch ein Reelles Banachbündel ist, nennen wir ein Reelles C^* -Algebrabündel. $\text{end } \xi$ ist somit ein Reelles C^* -Algebrabündel.

Sei Γ der Schnittfunktor, der jedem Banachbündel ξ über X den $C(x, \phi)$ -Modul $\Gamma(\xi)$ stetiger Schnitte von ξ zuordnet.

Sei ξ ein Reelles Banachbündel über dem Reellen Raum X . Für $s \in \Gamma(\xi)$ definieren wir $\bar{s} \in \Gamma(\xi)$ durch $\bar{s}(x) := \overline{s(x)}$, $x \in X$.

Def. 2.1.10 Sei ξ ein Reelles Banachbündel über X . Der Schnitt $s \in \Gamma(\xi)$ heißt Reell, wenn $\bar{s} = s$ gilt.

Satz 2.1.11 Sei ξ ein Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel über X . Dann läßt sich jedem Reellen $\mathcal{M}_c$ -Morphismus T von ξ in ξ umkehrbar eindeutig ein Reeller Schnitt $s \in \Gamma(\text{end } \xi)$ zuordnen.

Beweis: Sei $(U_i, \varphi_i, G_i)_{i \in I}$ ein Reeller Atlas des Reellen Bündels ξ und sei $T : \xi \longrightarrow \xi$ ein Reeller Morphismus. Dann definieren wir $s : X \longrightarrow \text{end } \xi$ durch

$$s(x) := T_x, \quad x \in X$$

Für $x \in U_i, i \in I$, ist die Abbildung

$$x \longmapsto \varphi_{i,x} T_x \varphi_{i,x}^{-1} = \tilde{\varphi}_{i,x} T_x$$

stetig; daher ist auch

$$x \longmapsto s(x) = \tilde{\varphi}_i^{-1}(x, \tilde{\varphi}_{i,x} T_x)$$

eine stetige Abbildung. Wegen

$$\overline{s(x)} = \overline{T_x} = T_x = s(x), \quad x \in X$$

ist s Reell.

Sei umgekehrt $s : X \longrightarrow \text{end } \xi$ ein Reeller stetiger Schnitt. Dann definieren wir

$$T : \xi \longrightarrow \xi$$

faserweise durch

$$T_x := s(x)$$

Sei $(x, v) \in U_i \times G_i(\mathcal{K}_c)$. Die Stetigkeit von T folgt nun aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \varphi_i T \varphi_i^{-1}(x, v) &= (x, \varphi_{i,x} T_x \varphi_{i,x}^{-1}(v)) \\ &= (x, \tilde{\varphi}_{i,x} T_x(v)) \\ &= (x, \tilde{\varphi}_{i,x} s(x)(v)) \end{aligned}$$

Weiterhin sieht man unmittelbar ein, daß T ein Reeller Morphismus ist.

q.e.d.

§ 2 Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel.

In diesem Paragraphen sei $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ stets eine strikt rein Reelle, halbendliche und eigentlich unendliche von Neumann'sche Algebra.

Sei ξ ein Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über dem Reellen Raum X und $(U_i, \varphi_i, G_i)_{i \in I}$ ein Reeller Atlas von ξ . ξ heißt endlich bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, wenn alle Projektionen G_i , $i \in I$, endlich bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ sind. In diesem Fall definieren wir für $x \in U_i$ die Faserdimension von ξ durch

$$\dim \xi_x := \dim G_i \in \mathcal{I}(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}),$$

wobei $\mathcal{I}(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})$ die Indexgruppe (vgl. Def. 1.2.25) von $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ ist. Die Funktion $x \mapsto \dim \xi_x$ ist lokal und deshalb auch auf jeder Zusammenhangskomponente von X konstant. Sind alle Projektionen G_i , $i \in I$, äquivalent, so heißt ξ von konstanter Faserdimension.

Lemma 2.2.1 Sei X ein Reeller kompakter Raum und ξ ein Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über X . Dann gibt es einen Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Atlas $(U_i, \varphi_i, H_i)_{i \in I}$ von ξ , so daß $H_i H_j = 0$ für $i \neq j$ gilt.

Beweis: Zunächst gibt es einen Reellen Atlas $(U_i, \varphi_i, G_i)_{1 \leq i \leq n}$, da X kompakt ist. Weiterhin ist nach Satz 1.2.24 mit $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ auch $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich. Also gibt es zu G_i äquivalente Reelle Projektionen H_i mit $H_i H_j = 0$ für $i \neq j$ und $W_i \in \mathcal{M}$ mit $W_i^* W_i = G_i$ und $W_i W_i^* = H_i$. Wegen $W_i \in \mathcal{M}$ ist $(U_i, W_i \circ \varphi_i, H_i)_{1 \leq i \leq n}$ der gesuchte Reelle Atlas.

q.e.d.

Im nächsten Lemma zeigen wir, daß jedes endliche Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel Reell isomorph zu einem Unterbündel eines trivialen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündels ist.

Satz 2.2.2 Sei X ein Reeller kompakter Raum und ξ ein endliches Reelles $\mathcal{M}_\Phi$ -Vektorbündel über X .

Dann gibt es eine endliche reelle Projektion $G \in \mathcal{M}$ und einen injektiven $\mathcal{M}_\Phi$ -Morphismus

$$T : \xi \longrightarrow X \times G(\mathcal{H}_\Phi)$$

Beweis: Nach Lemma 2.2.1 existiert ein Reeller Atlas

$(U_i, \varphi_{i, G_i})_{1 \leq i \leq n}$ mit $G_i G_j = 0, i \neq j$, von ξ . Dann ist

$G := \sum_{i=1}^n G_i$ eine endliche reelle Projektion. Sei

$\{\tilde{\lambda}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ eine Partition der Eins bez. der Überdeckung

$\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Wir definieren nun stetige Funktionen

$\lambda_i : X \longrightarrow [0, 1], 1 \leq i \leq n$, durch

$$\lambda_i(x) := \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_i(x) + \tilde{\lambda}_i(\bar{x})) \quad , \quad x \in X.$$

Es gilt:

- a) Träger $\lambda_i \subset U_i$, $1 \leq i \leq n$, denn alle U_i sind Reelle Räume
- b) $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i(\bar{x}) = 1$
- c) $\lambda_i(\bar{x}) = \lambda_i(x), 1 \leq i \leq n$.

Wir definieren nun

$$(1) \quad T_x : \xi_x \longrightarrow G(\mathcal{H}_\Phi)$$

durch

$$(2) \quad T_x(v) := \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i(x)} \varphi_{i, x}(v) \quad , \quad v \in \xi_x$$

und

$$(3) \quad T : \xi \longrightarrow X \times G(\mathcal{H}_\Phi)$$

durch

$$(4) \quad T(v) := (x, T_x v) \quad , \quad v \in \xi_x$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \|T_x(v)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i(x)} \varphi_{i,x}(v) \right\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \|\varphi_{i,x}(v)\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \|v\|^2 \\
 &= \|v\|^2
 \end{aligned}$$

ist T_x isometrisch. $T: \xi \longrightarrow X \times G(\mathcal{K}_e)$ ist sicherlich stetig, wenn

$$T_i := T \circ \varphi_i^{-1} : U_i \times G_i(\mathcal{K}_e) \longrightarrow X \times G(\mathcal{K}_e)$$

für $1 \leq i \leq n$ stetig ist. Nun gilt aber für $(x,v) \in U_i \times G_i(\mathcal{K}_e)$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad T \circ \varphi_i^{-1}(x,v) &= T_x \varphi_{i,x}^{-1}(v) = \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j(x)} \varphi_{j,x} \varphi_{i,x}^{-1}(v) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j(x)} \varepsilon_{j,i}(x)(v)
 \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $T \circ \varphi_i^{-1}$ folgt somit aus der Stetigkeit der Abbildung $x \longmapsto \varepsilon_{j,i}(x)$. Weiterhin zeigt (6), daß (Mor 2) erfüllt ist. Es bleibt zu zeigen, daß T reell ist. Nun gilt für $v \in \xi_x$

$$\begin{aligned}
 T(\bar{v}) &= (\bar{x}, T_{\bar{x}}(\bar{v})) = (\bar{x}, \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j(x)} \varphi_{j,\bar{x}}(\bar{v})) \\
 &= (\bar{x}, \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j(x)} \overline{\varphi_{j,x}(v)}) \\
 &= (x, \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j(x)} \varphi_{j,x}(v)) \\
 &= T(v)
 \end{aligned}$$

Also ist T ein reeller Morphismus.

q.e.d.

Bevor wir fortfahren, erinnern wir an den Begriff des induzierten Bündels. Seien X, Y Reelle Räume, $f: Y \rightarrow X$ eine Reelle stetige Abbildung und ξ ein Reelles $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündel über X ; dann setzen wir

$$f^*(\xi) := \left\{ (x, v) \in Y \times \xi \mid f(x) = p_\xi(v) \right\}.$$

$f^*(\xi)$ ist ein Reelles $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündel über dem Reellen Raum Y .

Wir zeigen nun, daß jedes Reelle $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündel zu einem induzierten Bündel eines Graßmannvektorbündels $\mathcal{M}_\epsilon$ -isomorph ist.

Satz 2.2.3 Seien X ein Reeller kompakter Raum und ξ ein endliches Reelles $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündel über X . Sei die Faserdimension von ξ konstant, etwa $\dim H$. Dann gibt es eine Reelle stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathcal{G}_H$, so daß ξ Reell $\mathcal{M}_\epsilon$ -isomorph zu dem induzierten Bündel $f^*(\mathcal{K}_H)$ ist.

Beweis: Seien $(U_i, \varphi_i, G_i)_{1 \leq i \leq n}$ ein Reeller Atlas von ξ und

$T: \xi \rightarrow X \times G(\mathcal{K}_\epsilon)$ der in Satz 2.2.2 definierte injektive Reelle $\mathcal{M}_\epsilon$ -Isomorphismus. Wir setzen für $x \in X$

$$(7) \quad f(x) := R_{T_x},$$

wobei R_{T_x} der linke Träger von T_x ist. Da T_x eine Isometrie ist, gilt $R_{T_x} \sim H$, so daß $f(x) \in \mathcal{G}_H$ ist.

Die Stetigkeit von f folgt aus der Stetigkeit der folgenden Abbildungen, die für $x \in U_i$ definiert sind durch

$$(8) \quad x \mapsto T_x \varphi_{i,x}^{-1} = \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j(x)} g_{j,i}(x)$$

und

$$(9) \quad T_x \varphi_{i,x}^{-1} \mapsto R_{T_x} \varphi_{i,x} = R_{T_x}$$

Außerdem ist f wegen

$$(10) \quad f(\bar{x}) = R_{T_{\bar{x}}} = R \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j(\bar{x})} g_{j,i}(\bar{x}) = \overline{R_{T_x}} = \overline{f(x)}$$

eine Reelle Abbildung.

Wir definieren nun

$$(11) \quad \tilde{T} : \xi \longrightarrow f^*(\mathcal{K}_H)$$

durch

$$(12) \quad \tilde{T}(v) := (x, R_{T_x}, T_x v) \quad , \quad v \in \xi_x.$$

Offensichtlich ist (Mor 1) erfüllt und T Reell.

Sei nun $(\mathcal{U}_G, \varphi_G, G)_{G \in PM}$ der in Satz [2.1.5] konstruierte Reelle Atlas von $\mathcal{K}_H$ und sei $x \in U_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_G)$.

Dann gilt für $v \in G_1(\mathcal{K}_G)$

$$\begin{aligned} \varphi_{G,f(x)} \tilde{T} \varphi_1^{-1}(x, v) &= \varphi_{G,f(x)}(x, f(x), T_x \varphi_{1,x}^{-1}(v)) \\ &= (f(x), \varphi_{G,f(x)} T_x \varphi_{1,x}^{-1}(v)) \end{aligned}$$

Also ist (Mor 2) erfüllt, denn

$$x \longmapsto \varphi_{G,f(x)} T_x \varphi_{1,x}^{-1} G_1$$

ist eine stetige Abbildung von $U_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_G)$ in $\mathcal{M}_G$.

Satz 2.2.3 Seien X ein Reeller kompakter Raum, $G \in \mathcal{M}$ eine reelle endliche Projektion und

$$(13) \quad f_t : X \longrightarrow \mathcal{K}_G \quad 0 \leq t \leq 1$$

eine Reelle Homotopie, d.h. $f_t(\bar{x}) = \overline{f_t(x)}$, $0 \leq t \leq 1$, für alle $x \in X$. Dann sind die induzierten Bündel $f_0^*(\tilde{\mathcal{K}}_G)$ und $f_1^*(\mathcal{K}_G)$ Reell isomorph über X .

Beweis: Sei $t_0 \in [0, 1]$. Weil X kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ und für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ die Beziehung

$$(14) \quad \|f_{t_0}(x) - f_t(x)\| < 1$$

gilt. Sei

$$(15) \quad f_t(x) - f_{t_0}(x) = v_{t,t_0}(x) \mid f_t(x) - f_{t_0}(x) \mid$$

die polare Zerlegung von $f_t(x) f_{t_0}^*(x)$, dann ist die Abbildung $x \mapsto v_{t,t_0}(x)$ stetig und es gilt für $x \in X$

$$(16) \quad v_{t,t_0}(x) v_{t,t_0}^*(x) = f_t(x)$$

$$(17) \quad v_{t,t_0}^*(x) v_{t,t_0}(x) = f_{t_0}^*(x)$$

$$(18) \quad v_{t,t_0}(x) = v_{t,t_0}(x)$$

Also induziert die Familie $v_{t,t_0}(x)$, $x \in X$, einen Reellen $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus von $f_t^*(\mathcal{X}_G)$ auf $f_{t_0}^*(\mathcal{X}_G)$. Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt $f_0^*(\mathcal{X}_G) \cong f_1^*(\mathcal{X}_G)$.

q.e.d.

Satz 2.2.3 liefert das folgende wichtige Corollar.

Corollar 2.2.4 Seien X, Y Reelle, kompakte Räume;

$f_t : X \longrightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, eine Reelle Homotopie und $\mathcal{V}$ ein endliches Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel über Y . Dann ist $f_0^*(\mathcal{V})$ Reell $\mathcal{M}_c$ -isomorph zu $f_1^*(\mathcal{V})$.

Beweis: Wir nehmen o.B.d.A an, daß Y zusammenhängend ist. Dann ist die Faserdimension von $\mathcal{V}$ konstant, etwa $\dim G$. Nach Satz 2.2.3 gibt es eine Reelle Abbildung $g : Y \longrightarrow \mathcal{X}_G$, so daß $\mathcal{V} \cong g^*(\mathcal{X}_G)$ gilt. Wir definieren nun eine Reelle Homotopie

$$h_t : X \longrightarrow \mathcal{X}_G$$

durch

$$h_t := g \circ f_t \quad 0 \leq t \leq 1,$$

dann folgt mit Satz 2.2.3

$$f_0^*(\mathcal{V}) \cong f_0^* g^*(\mathcal{X}_G) \cong h_0^*(\mathcal{X}_G) \cong h_1^*(\mathcal{X}_G) \cong f_1^*(\mathcal{V})$$

q.e.d.

Sei ξ ein Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel über X und
 $(U_i, \varphi_i, 1)_{i \in I}$ ein Reeller Atlas von ξ . Die unitäre Gruppe
 $\mathcal{U}$ von $\mathcal{M}_c$ ist dann die Strukturgruppe von ξ . $\mathcal{U}$ ist
 nach [10] zusammenziehbar, denn $\mathcal{M}_c$ ist eigentlich unend-
 lich.

Für die in [10] angegebene Homotopie

$$(21) \quad H_t : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(22) \quad H_0(T) = 1 \quad \forall T \in \mathcal{M}$$

$$(23) \quad H_1(T) = T \quad \forall T \in \mathcal{M}$$

gilt zusätzlich

$$H_t(\bar{T}) = \overline{H_t(T)} \quad .$$

Denn zunächst lassen sich die in [10, §3 Satz 2, Satz 3]
 angegebenen Projektionen reell wählen und anschließend
 überprüft man leicht, daß alle in [10, § 1] angegebenen
 Homotopien Reell sind.

Nach Dold [13] besitzt somit das prinzipale Bündel $P(\xi)$
 von ξ einen Schnitt, falls X zusätzlich ein metrischer
 Raum ist. Da wir an Reellen Schnitten interessiert sind,
 reproduzieren wir hier noch einmal die entsprechenden
 Beweise.

Lemma 2.2.5 Sei A ein abgeschlossener, Reeller Unterraum des
 kompakten, metrischen, Reellen Raumes X . Dann läßt sich
 jede Reelle Abbildung $f : A \longrightarrow \mathcal{U}$ zu einer Reellen Ab-
 bildung $F : X \longrightarrow \mathcal{U}$ fortsetzen.

Beweis: Nach einem Satz von Dugundji [14, Ch. IX Th. 6.1] läßt sich
 $f : A \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{M}_c$ zu einer stetigen Abbildung $f' : X \longrightarrow \mathcal{M}_c$
 erweitern; also ist $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathcal{M}_c$

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2} (\overline{f'(x)} + f'(x)) \quad , \quad x \in X$$

eine Reelle Erweiterung von f . Sei $G\mathcal{M}_c$ die Gruppe der
 regulären Elemente von $\mathcal{M}_c$, dann ist $V := \tilde{f}^{-1}(G\mathcal{M}_c)$ eine
 offene Reelle Umgebung von A . Sei $r : G\mathcal{M}_c \longrightarrow \mathcal{U}$ die üb-

liche Retraktionsabbildung mit $r(T) := T(TT^*)^{-\frac{1}{2}}$ für $T \in G\mathcal{M}_c$. Dann ist $r \circ \tilde{f} : V \rightarrow \mathcal{U}$ eine Reelle Erweiterung von f . Sei nun $H_t, 0 \leq t \leq 1$, die in [21] definierte Homotopie. Weil X kompakt ist, gibt es eine stetige Funktion $\tau : X \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\tau(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X - V \end{cases}$$

und $\tau(\bar{x}) = \tau(x)$. Wir setzen nun

$$F(x) := \begin{cases} 1 & \tau(x) \leq \frac{1}{2} \\ H(r \circ \tilde{f}(x), 2\tau(x) - 1) & \tau(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

dann ist $F : X \rightarrow \mathcal{U}$ eine Reelle Erweiterung von f .

q.e.d.

Der folgende Satz findet sich im wesentlichen schon bei Steenrod [24].

Satz 2.2.6 Seien X und $A \subset X$ wie in Lemma 2.2.5, ξ ein Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel über X , $(U_i, \psi_i, 1)_{i \in I}$ ein Reeller Atlas von ξ und $P(\xi)$ das zugehörige prinzipale Bündel. Dann läßt sich jeder Reelle Schnitt $s : A \rightarrow P(\xi)$ zu einem Reellen Schnitt $\tilde{s} : X \rightarrow P(\xi)$ erweitern.

Beweis: Seien $\tau : X \rightarrow X$ die Involution und $(U_i, \psi_i, \mathcal{U})_{i \in I}$ ein Atlas von $P(\xi)$. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $i \in I$ und eine Umgebung V_x von x mit $\overline{V_x} \subset U_i$. (Hier bezeichne $\overline{V_x}$ ausnahmsweise den topologischen Abschluß von V_x). Sei $V_1, \dots, V_m$ eine endliche Teilüberdeckung der Überdeckung $\{V_x\}_{x \in X}$. Wir setzen $A_0 := A$ und definieren A_n induktiv durch $A_n := \overline{V_n} \cup \tau(\overline{V_n}) \cup A_{n-1}$. Sei $s_0 := s$ und seien reelle Schnitte $s_1 : A_1 \rightarrow P(\xi)$ mit $s_1|_{A_{1-1}} = s_{1-1}$, $1 \leq n-1$,

konstruiert, dann erhält man s_n wie folgt. Zunächst ist $C_n := (\overline{V_n} \cup \tau(\overline{V_n})) \cap A_{n-1}$ ein abgeschlossener Reeller Unterraum von $\overline{V_n} \cap (\overline{V_n})$; außerdem gibt es ein $i \in I$, so daß $\overline{V_n} \cup \tau(\overline{V_n}) \subset U_i$ gilt. Es bezeichne $\pi_i : U_i \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ die natürliche Projektion. Die Reelle Abbildung

$\tau \circ \psi_i \circ s_{n-1} : C_n$ läßt sich nach Lemma 2.2.5 zu einer Reellen Abbildung $\widetilde{\tau \circ \psi_i \circ s_{n-1}} : \overline{V_n} \cup \tau(\overline{V_n}) \rightarrow \mathcal{U}$ erweitern. Setzen wir nun für $x \in \overline{V_n} \cup (\overline{V_n})$

$h(x) := \psi_i^{-1}(x, \tau \circ \psi_i \circ f_{n-1}(x))$, dann ist $h : \overline{V_n} \cup (\overline{V_n}) \rightarrow P(\xi)$ Reell und stetig und es gilt $h|_{C_n} = s_{n-1}|_{C_n}$. Wir definieren nun

$$s_n(x) := \begin{cases} s_{n-1}(x) & x \in A_{n-1} \\ h(x) & x \in A_n - A_{n-1} \end{cases}$$

$s_n : A_n \rightarrow P(\xi)$ ist ein Reeller, stetiger Schnitt, der s_{n-1} fortsetzt. Die gesuchte Reelle Erweiterung von s erhalten wir mittels

$$\tilde{s}(x) := s_n(x) \quad \text{für } x \in A_n - A_{n-1}.$$

q.e.d.

Setzen wir $A = \emptyset$, so besitzt $P(\xi)$ insbesondere einen Reellen Schnitt.

Satz 2.2.7 Sei ξ ein Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel über dem kompakten, metrischen, Reellen Raum X . Sei $(U_i, \psi_i, 1)_{i \in I}$ ein Reeller Atlas von ξ . Dann ist ξ Reell $\mathcal{M}_c$ -isomorph zu dem trivialen $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel $X \times \mathcal{H}_c$. Zwei beliebige Reelle $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismen von ξ auf $X \times \mathcal{H}_c$ sind Reell homotop.

Beweis: Nach Satz 2.2.6 existiert ein Reeller Schnitt

$s : X \rightarrow P(\xi)$. Sei $(U_i, \psi_i, 1)_{i \in I}$ ein Atlas von $P(\xi)$.

Dann definieren wir Reelle stetige Funktionen

$$\lambda_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\lambda_i(x) := \pi \circ \psi_i(s(x)) = \psi_{i,x}(s(x)).$$

Weil ξ und $P(\xi)$ dieselben Übergangsfunktionen besitzen, gilt für $x \in U_i \cap U_j$

$$\begin{aligned} g_{ji}(x) \lambda_i(x) &= g_{ji}(x) \psi_{i,x}(s(x)) \\ &= \psi_{j,x} \psi_{i,x}^{-1} \psi_{i,x}(s(x)) \\ &= \psi_{j,x}(s(x)) \\ &= \lambda_j(x) \end{aligned}$$

also

$$g_{ji}(x) = \lambda_j(x) \lambda_i(x)^{-1}$$

Für $x \in U_j \cap U_k$ setzen wir nun

$$\widetilde{g}_{kj}(x) := \lambda_k(x)^{-1} g_{kj}(x)$$

Dann gilt für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$

$$\widetilde{g}_{kj}(x) g_{ji}(x) = \lambda_k(x)^{-1} g_{kj}(x) g_{ji}(x) = \lambda_k(x)^{-1} g_{ki}(x) = \widetilde{g}_{ki}(x)$$

Wir definieren weiter

$$T : \xi \longrightarrow X \times \mathcal{H}_e$$

koordinatenweise durch

$$T_{kj}(v) := (x, \widetilde{g}_{kj}(x) \psi_{j,x}(v)) \quad v \in \xi_x, \quad x \in V_j \cap V_k$$

Sei nun $x \in U_i \cap U_j \cap U_k \cap U_l$. Dann folgt

$$\begin{aligned} T_{kj}(v) &= (x, \widetilde{g}_{kj}(x) \psi_{j,x}(v)) \\ &= (x, \widetilde{g}_{kj}(x) \psi_{j,x} \psi_{i,x}^{-1} \psi_{i,x}(v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x, \widetilde{g_{kj}}(x) \ g_{ji}(x) \ \varphi_{i,x}(v)) \\
 &= (x, \widetilde{g_{ki}}(x) \ \varphi_{i,x}(v)) \\
 &= (x, \widetilde{g_{li}}(x) \ \varphi_{i,x}(v)) \\
 &= T_{li}(v).
 \end{aligned}$$

Also stimmen je zwei Funktionen aus $\{T_{jk}\}$ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein. T ist deshalb ein $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Morphismus. Es bleibt zu zeigen, T ist Reell.

Sei $v \in \xi_x$, $x \in U_j \cap U_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 T_{kj}(\bar{v}) &= (\bar{x}, \widetilde{g_{kj}}(\bar{x}) \ \varphi_{j,\bar{x}}(\bar{v})) \\
 &= (\bar{x}, \overline{\widetilde{g_{kj}}(x) \ \varphi_{j,x}(v)}) \\
 &= \overline{(x, \widetilde{g_{kj}}(x) \ \varphi_{j,x}(v))} \\
 &= \overline{T_{kj}(v)}
 \end{aligned}$$

also ist T Reell.

Seien nun $V, \widetilde{V}$ zwei Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Isomorphismen von ξ auf $X \times \mathcal{X}_{\mathbb{C}}$. Dann definiert $V \circ \widetilde{V}^*$ eine Reelle stetige Abbildung von X in $\mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ Reell zusammenziehbar ist, gibt es eine Reelle Homotopie $W_t : X \rightarrow \mathcal{U}$, $0 \leq t \leq 1$, mit $W_1 = V \circ \widetilde{V}^*$ und $W_0(x) = 1$ für alle $x \in X$. $V_t := W_t \circ \widetilde{V}$ ist dann die gesuchte Reelle Homotopie zwischen V und $\widetilde{V}$.

q.e.d.

Wir sind nun in der Lage die Umkehrung von Satz 2.2.3 zu beweisen.

Satz 2.2.8 Sei X ein metrischer, kompakter, Reeller Raum und $G \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ eine endliche reelle Projektion. Seien $f, g : X \rightarrow \mathcal{Y}_G$ stetige und Reelle Abbildungen und sei $f^*(\mathcal{Y}_G)$ Reell $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -isomorph zu $g^*(\mathcal{Y}_G)$. Dann sind f und g Reell homotop.

Beweis: Weil $f^*(\mathcal{L}_G)$ reell $\mathcal{M}_c$ -isomorph zu $g^*(\mathcal{L}_G)$ ist, gibt es eine stetige Abbildung $x \mapsto V_x$ von X in $\mathcal{M}_c$ mit $f(x) = V_x^* V_x$, $g(x) = V_x V_x^*$ und $V_{\bar{x}} = \overline{V_x}$. Weil G eine endliche Projektion ist, gilt $1 - G \sim G$. Wir definieren nun Reelle stetige Abbildungen $\tilde{f} : X \rightarrow \mathcal{C}_1$ $1 - G = \mathcal{C}_1$ und $\tilde{g} : X \rightarrow \mathcal{C}_1$ durch $\tilde{f}(x) := 1 - f(x)$ und $\tilde{g}(x) := 1 - g(x)$

Nach Satz 2.2.7 gibt es Reelle $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismen

$$\tilde{\Phi} : \tilde{f}^* \mathcal{L}_{1-G} \longrightarrow X \otimes \mathcal{H}_c$$

$$\tilde{\Psi} : \tilde{g}^* \mathcal{L}_{1-G} \longrightarrow X \otimes \mathcal{H}_c$$

Definiere

$$T : X \longrightarrow \mathcal{U}$$

durch

$$T(x) := V_x + \Psi_x^{-1} \tilde{\Phi}_x \quad x \in X.$$

Dann gilt offenbar

$$T(\bar{x}) = \overline{T(x)} \quad x \in X$$

und

$$g(x) = T(x) f(x) T^*(x) \quad x \in X.$$

Weil $\mathcal{U}$ reell zusammenziehbar ist, gibt es eine Homotopie

$$T_t : X \longrightarrow \mathcal{U}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{mit}$$

$$T_t(\bar{x}) = \overline{T_t(x)} \quad t \in [0, 1], \quad \forall x \in X$$

$$T_0(x) = 1 \quad x \in X$$

$$T_1(x) = T(x) \quad x \in X.$$

Setzen wir für $x \in X$

$$f_t(x) := T_t(x) f(x) T_t^*(x)$$

so ist f_t eine Reelle Homotopie mit $f_0 = f$ und $f_1 = g$.

§ 3 Kohomologietheorie für Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel.

In diesem Paragraphen sei $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ stets eine eigentlich unendliche, halbendliche, strikt rein Reelle von Neumann'sche Algebra.

Zunächst erklären wir die "Summe" von zwei Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündeln.

Lemma 2.3.1 Seien ξ, η endliche Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über X . Dann ist auch

$$\xi \oplus \eta := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times (\xi_x \oplus \eta_x)$$

ein endliches Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über X .

Beweis: Seien $(U_i, \varphi_i, G_i)_{i \in I}$, $(U_i, \varphi'_i, G'_i)_{i \in I}$ Reelle Atlanten von ξ, ξ' . Da mit $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ auch $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich ist, gibt es Projektionen $H_i \in \mathcal{M}$, $i \in I$, mit

$$(1) \quad G_i \sim H_i \leq 1 - G'_i, \quad i \in I$$

und deshalb $W_i \in \mathcal{M}$, $i \in I$, mit $W_i^* W_i = G_i$, $W_i W_i^* = H_i$. Dann ist $(U_i, W_i \circ \varphi_i, H_i)_{i \in I}$ ebenfalls ein Reeller Atlas von ξ .

Der Reelle Atlas $(U_i, (W_i \circ \varphi_i) \oplus \varphi'_i, H_i + G'_i)_{i \in I}$ definiert dann auf $\xi \oplus \eta$ die Struktur eines Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündels.

q.e.d.

Als Nächstes zeigen wir, daß sich zu jedem Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel ξ ein Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel η finden läßt, so daß $\xi \oplus \eta$ trivial ist.

Lemma 2.3.2 Seien $G \in \mathcal{M}$ eine endliche Projektion und $f: X \rightarrow \mathcal{G}_G$ eine Reelle, stetige Abbildung.

Sei $\xi = f^*(\mathcal{H}_G)$, η ein Reelles $\mathcal{M}_\epsilon$ -Unterbündel von ξ und $(\xi \ominus \eta)_x := \xi_x \ominus \eta_x$ das orthogonale Komplement von η_x in ξ_x . Dann ist

$$\xi \ominus \eta := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times (\xi \ominus \eta)_x$$

ebenfalls ein Reelles $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündel über X , für das $\eta \oplus (\xi \ominus \eta) \cong \xi$ gilt.

Beweis: Sei O.B.d.A. X zusammenhängend. Dann ist die Faserdimension von η konstant, etwa $\dim F$, $F \leq G$.

Die in Lemma 2.2.2 definierte Abbildung

$$(2) \quad T: \xi \longrightarrow X \times \mathcal{H}_\epsilon$$

induziert eine Abbildung

$$(3) \quad (T|_\eta): \eta \longrightarrow X \times \mathcal{H}_\epsilon, \quad$$

weil η ein Unterbündel von ξ ist. Die Abbildungen

$$f': X \longrightarrow \mathcal{G}_F \quad f'(x) := R(T|_\eta)_x \quad \text{und}$$

$$f'': X \longrightarrow \mathcal{G}_{G-F}, \quad f''(x) := f(x) - f'(x) \quad \text{sind offenbar}$$

Reell und es gilt $\eta \cong (f')^*(\mathcal{H}_F)$.

Versehen wir nun $(\xi \ominus \eta)$ mit der Vektorbündelstruktur von $(f'')^*(\mathcal{H}_{G-F})$, so folgt sofort $\xi \cong \eta \oplus (\xi \ominus \eta)$.

q.e.d.

Satz 2.3.3 Sei X metrisch, kompakt und Reell und sei ξ ein endliches Reelles $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündel über X . Dann gibt es ein endliches Reelles Bündel η über X und eine endliche Projektion $G \in \mathcal{M}$ derart, daß

$$\xi \oplus \eta \cong X \times G(\mathcal{H}_\epsilon)$$

Beweis: Der Beweis folgt sofort aus Lemma 2.2.2 und Lemma 2.3.2

Man sieht unmittelbar ein, daß für die direkte Summe Reeller $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel folgendes gilt

- (a) $\xi \oplus (\eta \oplus \zeta) \cong (\xi \oplus \eta) \oplus \zeta$
- (b) $\xi \oplus \eta \cong \eta \oplus \xi$
- (c) $\xi \oplus 0 \cong \xi$
- (d) $\xi \cong \eta, \xi' \cong \eta' \Rightarrow \xi \oplus \xi' = \eta \oplus \eta'.$

Wir bezeichnen nun mit $\text{Vect } \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$ die Menge der Isomorphieklassen endlicher, Reeller $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über X . (d) besagt dann, daß

$$\oplus : \text{Vect } \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X) \times \text{Vect } \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X) \rightarrow \text{Vect } \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$$

wohldefiniert ist. Aus a)-d) folgt weiter, daß $(\text{Vect } \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X), \oplus)$ eine kommutative Halbgruppe ist.

Jede Halbgruppe läßt sich auf eindeutige Weise zu einer Gruppe erweitern [Lang, Atiyah, Husemoller].

Def. 2.3.4 Sei X ein Reeller, kompakter, metrischer Raum. Dann bezeichnet $KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(X)$ die Grothendieckgruppe von $\text{Vect } \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$.

Falls die Involution auf X die Identität ist, so können wir vollkommen analog zu den vorausgegangenen Ausführungen die Gruppe $KO_{\mathcal{M}}(X)$ definieren, die von reellen $\mathcal{M}$ -Vektorbündeln erzeugt wird.

Nach Satz 2.1.7 gilt dann $KO_{\mathcal{M}}(X) = KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(X)$.

$KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der kompakten, metrischen, Reellen Räume und der stetigen Reellen Abbildungen in die Kategorie der kommutativen Gruppen und deren Homomorphismen. Den von einer Reellen stetigen Abbildung f induzierten Gruppenhomomorphismus bezeichnen wir mit f^* . Sind f, g Reell homotope Abbildungen so gilt nach Cor. 2.2.4 stets $f^* = g^*$.

Ist ξ ein endliches, Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über X , so bezeichnen wir mit $\xi_{\mathbb{C}}$ die Klasse von ξ in $KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(X)$.

Weiterhin schreiben wir abkürzend $\text{Vect } R(X)$ statt $\text{Vect } R_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})}(X)$ und $KR(X)$ statt $KR_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})}(X)$.

Falls $X = \{x_0\}$ ein Einpunktraum ist, so gilt

$$(4) \quad KR_{\mathcal{M}_e}(x_0) = \mathcal{I}(\mathcal{M}_e) ,$$

wobei $\mathcal{I}(\mathcal{M}_e)$ die in Kapitel I. § 2 definierte Indexgruppe von $\mathcal{M}_e$ ist.

Wir geben nun einige einfache Lemmata über $KR_{\mathcal{M}_e}$ an, deren Beweise nur angedeutet werden, weil sie vollkommen analog zu den entsprechenden Beweisen über KR sind.

Seien a bzw. ξ Reelle, endliche $\mathcal{L}(\mathcal{H}_e)$ -Vektorbündel bzw. $\mathcal{M}_e$ -Vektorbündel über X . Wir nehmen O.B.d.A. die Faserdimensionen von a, ξ als konstant, etwa n bzw. $\dim G$, an.

Nach Steenrod, Part I, 12.9 gibt es dann einen Reellen Atlas $(U_i, \varphi_i, \phi^n)_{i \in I}$ von a , dessen Übergangsfunktionen Werte in der unitären Gruppe $\mathcal{U}(n)$ von ϕ^n annehmen.

Sei $(U_i, \psi_i, G)_{i \in I}$ ein Reeller Atlas von ξ . Weil $\mathcal{M}_e$ eigentlich unendlich ist, gibt es Projektionen $G'_i \in \mathcal{M}$, $1 \leq i \leq n$, $G'_i G'_j = 0$ für $i \neq j$, derart, daß

$$(5) \quad G' = \sum_{i=1}^n G'_i \quad , \quad G'_i \sim G \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

Also gibt es partielle Isometrien $W_i \in \mathcal{M}$ mit

$$(6) \quad W_i^* W_i = G \quad , \quad W_i W_i^* = G'_i \quad 1 \leq i \leq n.$$

Wählen wir eine orthonormierte Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von ϕ^n mit der Eigenschaft $\bar{e}_j = e_j$, $1 \leq j \leq n$, so ist durch

$$(7) \quad \delta \left(\sum_{j=1}^n e_j \otimes v_j \right) : = \sum_{j=1}^n W_j (v_j) \quad v_j \in G(\mathcal{H}_e)$$

ein Reeller isometrischer Isomorphismus

$$(8) \quad \delta : \phi^n \otimes G(\mathcal{H}_e) \longrightarrow G'(\mathcal{H}_e)$$

erklärt. Dann ist $(U_i, \delta \cdot (\varphi_i \otimes \varphi_i), G^i)_{i \in I}$ ein Reeller $\mathcal{M}_\epsilon$ -Atlas des Tensorproduktes $a \otimes \xi$ der Bündel a und ξ . Die Äquivalenzklasse dieses Atlanten definiert auf $a \otimes \xi$ die Struktur eines Reellen $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündels.

Man sieht nun unmittelbar ein, daß für Reelle endliche $\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)$ -Vektorbündel a, b und Reelle, endliche $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündel ξ, η folgendes gilt:

- (a) $a \cong b \quad \xi \cong \eta \implies a \otimes \xi \cong b \otimes \eta$
- (b) $a \otimes (\xi \oplus \eta) \cong a \otimes \xi \oplus a \otimes \eta$
- (c) $(a \oplus b) \otimes \xi \cong a \otimes \xi \oplus b \otimes \xi$
- (d) $(a \otimes b) \otimes \xi \cong a \otimes (b \otimes \xi).$

Auf naheliegende Weise definieren wir nun

$$(9) \quad \tilde{\delta} : \text{Vect } R(X) \times \text{Vect } R_{\mathcal{M}_\epsilon}(X) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_\epsilon}(X)$$

durch

$$(10) \quad \tilde{\delta}(a, \xi) := [a \otimes \xi]_{\mathcal{M}_\epsilon}$$

Die Konstruktion von $KR_{\mathcal{M}_\epsilon}(X)$ und a)-d) führen sofort zu dem folgenden Lemma.

Lemma 2.3.5 Es gibt genau eine Abbildung

$\delta : KR(X) \times KR_{\mathcal{M}_\epsilon}(X) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_\epsilon}(X)$, die auf $KR_{\mathcal{M}_\epsilon}(X)$ die Struktur eines $KR(X)$ - Moduls definiert und für die

$$\delta([a], [\xi]_{\mathcal{M}_\epsilon}) = [a \otimes \xi]_{\mathcal{M}_\epsilon}$$

gilt.

Wir definieren nun den reduzierten $KR_{\mathcal{M}_\epsilon}$ -Funktork. Sei

X ein Reeller, kompakter, metrischer Raum mit dem Reellen Basispunkt $x_0 \in X$, d.h. $\overline{x}_0 = x_0$, und sei

$$i : x_0 \longrightarrow X$$

die natürliche Inklusion. Dann setzen wir:

$$(11) \quad \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X) := \text{Kern} [i^* : KR_{\mathcal{M}_c}(X) \longrightarrow \mathcal{J}(\mathcal{M}_c)]$$

Es gilt stets

$$KR_{\mathcal{M}_c}(X) \cong \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X) \oplus \mathcal{J}(\mathcal{M}_c)$$

Lemma 2.3.6 Sei X ein kompakter, metrischer und Reeller Raum mit einem Reellen Basispunkt. Dann ist $\widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X)$ ein $KR(X)$ - Untermodul von $KR_{\mathcal{M}_c}(X)$.

Beweis: Nach [17, Part. II, 8.3.8]

$$(12) \quad \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X) = \left\{ [\xi]_{\mathcal{M}_c} - \text{Dim } \xi_\infty \mid \xi \in \text{Vect } R_{\mathcal{M}_c}(X) \right\}$$

Für $[a]$, $[b] \in KR(X)$ ist

$$(13) \quad i^*([a] - [b])([\xi]_{\mathcal{M}_c} - \text{Dim } \xi_\infty) = 0$$

Da sich jedes Element von $KR(X)$ als eine Differenz $[a] - [b]$ schreiben läßt, folgt die Behauptung aus (13).

q.e.d.

Als Nächstes erinnern wir an die Definition des "smash Produktes" zweier topologischer Räume mit Basispunkten.

Seien X, Y Reelle, kompakte, metrische Räume mit den Reellen Basispunkten x_0, y_0 . Dann setzen wir

$$(14) \quad X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$$

und

$$(15) \quad X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

Es ist klar, daß $X \wedge Y$ ebenfalls ein Reeller metrischer kompakter Raum mit Basispunkt ist.

Die 1-Sphäre $S = R \cup \{\infty\}$ ist ein Reeller Raum, wenn wir für $r \in R$, $\bar{r} = r$ und $\overline{\infty} = \infty$ setzen. $\{\infty\}$ ist der natürliche Basispunkt von S .

$S \wedge X$ heißt die reduzierte Einhängung von X . Wir schreiben kurz SX statt $S \wedge X$. Die n -te iterierte Einhängung $S \dots SX$ von X ist natürlich homöomorph zu $S^n \wedge X$.

Analog zu [1, Def. 2.4.1] definieren wir nun:

Def. 2.3.7 Sei X ein Reeller, kompakter, metrischer Raum mit Reellem Basispunkt und sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Reeller Unterraum von X .

Dann definieren wir für $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}^{-n}(X) := \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(S^n X)$$

$$\widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}^{-n}(X, Y) := \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(S^n(X/Y))$$

Wir erhalten die folgende exakte Kohomologiesequenz.

Satz 2.3.8 Sei X ein kompakter, metrischer und Reeller Raum mit Reellem Basispunkt und sei Y ein abgeschlossener Reeller Unterraum von X . Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}^{-1}(X, Y) \rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}^{-1}(X) \rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}^{-1}(Y) \rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X, Y) \rightarrow$$

$$\widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X) \rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y).$$

Beweis: Der Beweis von Husemoller [17, Ch. II, 9.2] kann wörtlich übernommen werden, weil alle dort angegebenen Abbildungen und Homotopien Reell sind.

Jede Kohomologietheorie, die für kompakte Räume mit Basispunkt erklärt ist, gibt zu einer Kohomologietheorie für lokalkompakte Räume ohne Basispunkt Anlaß. Sei X ein lokalkompakter, Reeller, 2^0 -abzählbarer Raum, dann ist die Einpunktkompaktifizierung $X = \hat{X}$ ein metrischer, Reeller Raum [15, Ch. XI, Th. 8.6]. Falls X schon kompakt ist, so sei $\hat{X}$ die Vereinigung von X mit einem disjunkten Punkt.

Def. 2.3.8 Sei X ein lokalkompakter, 2^0 abzählbarer, Reeller Raum und sei Y ein abgeschlossener, Reeller Unterraum von X . Dann definieren wir:

$$KR_{\mathcal{M}_c}^{-n}(X) := \widetilde{KR}^{-n}(\widehat{X}) \quad n \geq 0$$

$$KR_{\mathcal{M}_c}^{-n}(X, Y) := \widetilde{KR}^{-n}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \quad n \geq 0$$

Es gilt stets $KR^{-n}(X) = KR(R^n \times X)$ und

$KR^{-n}(X, Y) = KR^{-n}(R^n \times X, R^n \times Y)$, denn es gibt einen Homöomorphismus von $(R^n \times X)$ auf $S^n \wedge \widehat{X}$. Wir haben $KR_{\mathcal{M}_c}$

somit zu einem Funktor von der Kategorie der lokalkompakten 2^0 abzählb. Reellen Räume und der eigentlichen Reellen Abbildungen in die Kategorie der abelschen Gruppen und Homomorphismen erweitert.

Das folgende Lemma ist eine formale Konsequenz von Satz 2.3.8.

Lemma 2.3.9 Seien X, Y Reelle, kompakte, metrische Räume mit Basispunkten. Seien $i_X : X \rightarrow X \times Y$ und $i_Y : Y \rightarrow X \times Y$ die natürlichen Inklusionen. Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \wedge Y) \rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \times Y) \xrightarrow{i_X^* \oplus i_Y^*} \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X) \oplus \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y) \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis: Siehe Husemoller [17, Ch.II, 9.3.4]

Seien $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$, $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ die natürlichen Projektionen, $a \in \text{Vect } R(X)$ und $\xi \in \text{Vect } R_{\mathcal{M}_c}(X)$. Dann wird durch

$$(10) \quad \lambda([a], [\xi]_{\mathcal{M}_c}) := [\pi_X^*(a) \otimes \pi_Y^*(\xi)]_{\mathcal{M}_c}$$

eine $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung

$$(17) \quad \lambda : \widetilde{KR}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X) \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \times Y)$$

definiert. Im Folgenden schreiben wir kurz

$$(18) \quad ([a] \otimes [\xi]_{\mathcal{M}_c}) = [a] [\xi]_{\mathcal{M}_c}.$$

Besitzen X und Y Basispunkte, so induziert λ eine Abbildung

$$(19) \quad \lambda : \widetilde{KR}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y) \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \times Y).$$

Lemma 2.3.10 Seien $i_X : X \longrightarrow X \times Y$ und $i_Y : Y \longrightarrow X \times Y$ die natürlichen Inklusionen.

Dann ist die folgende Komposition von Abbildungen Null.

$$\widetilde{KR}(X) \otimes \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y) \xrightarrow{\lambda} \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \times Y) \xrightarrow{i_X^* \otimes i_Y^*} \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X) \otimes \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y)$$

Beweis: Der Beweis folgt sofort aus den Definitionen von λ , i_X und i_Y .

Lemma 2.3.10 zeigt in Verbindung mit Lemma 2.3.9, daß das Bild von λ im Bild des injektiven Homomorphismus

$$(20) \quad \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \wedge Y) \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \times Y)$$

enthalten ist. Deshalb betrachten wir von nun an λ stets als einen Homomorphismus

$$(21) \quad \lambda : \widetilde{KR}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y) \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \wedge Y).$$

Sind X und Y lokalkompakte 2^0 abzählbare, Reelle Räume so induziert wegen $\widehat{X \wedge Y} \approx \widehat{(X \times Y)}$ λ insbesondere einen Homomorphismus

$$(22) \quad \lambda : \widetilde{KR}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y) \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(X \times Y).$$

Vollkommen analog zu den vorhergehenden Ausführungen können wir auch die Abbildung

$$(23) \quad \lambda' : \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{KR}(X) \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(Y \wedge X)$$

betrachten, die durch

$$(24) \quad \lambda'([\xi]_{\mathcal{M}_c}, [a]) = \pi_Y^*(\xi) \otimes \pi_X^*(a)$$

definiert ist. Wir schreiben kurz $[\xi]_{\mathcal{M}_c} [a]$ für $\lambda^1 ([\xi]_{\mathcal{M}_c}, [a])$. Definieren wir

$$(25) \quad i : X \times Y \longrightarrow Y \times X$$

durch

$$(26) \quad i (x, y) : =(y, x)$$

so gilt

$$i^* ([\xi]_{\mathcal{M}_c} [a]) = ([a] [\xi]_{\mathcal{M}_c}) \quad .$$

§ 4 Der Satz von Atiyah - Jänich

Sei $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ stets eine strikt rein Reelle, halbendliche, eigentlich unendliche von Neumann'sche Algebra. In [7] definiert Breuer kompakte Elemente und Fredholmelemente bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$.

Ein Element $T \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ heißt endlich, wenn die Bildprojektion R_T endlich ist. Mit $\mathcal{M}_0$ wird die Menge aller endlichen Elemente von $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ bezeichnet; dann ist der Normabschluß $\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}_0$ ein zweiseitiges $*$ -Ideal von $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$. Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen kompakt.

Sei $K \subset \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ und P_K die Projektion von $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ auf den Normabschluß von K . Dann heißt K bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ abgeschlossen, falls es eine nichtfallende Folge

$$E_1 \leq E_2 \leq E_3 \leq \dots$$

von Projektionen aus $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ gibt derart, daß

- (a) $E_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- (b) $P_K = \sup \{ E_n \mid n \in \mathbb{N} \}$
- (c) $P_K - E_1$ ist endlich

Ein Element $T \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ heißt ein Fredholmelement bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ wenn die Nullprojektionen $N_T = 1 - R_{T*}$ und $N_{T*} = 1 - R_T$ endlich sind und $T(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ abgeschlossen ist.

Fredholmelemente lassen sich wie folgt charakterisieren.

Satz 2.4.1 $T \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ ist genau dann ein Fredholmelement bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, wenn T modulo $\mathcal{M}$ regulär ist.

Beweis: Der Beweis findet sich bei Breuer [8, Th. 1]

Mit $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})$ werde die Menge der Fredholmelemente bez. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ bezeichnet. Nach Satz 2.4.1 ist $\mathcal{F}\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$; außerdem ist $\mathcal{F}\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ eine involutive Halbgruppe.

Die Indexabbildung

$$(1) \quad \text{Index } \mathcal{F}(\mathcal{M}_c) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{M}_c)$$

ist durch

$$(2) \quad \text{Index } T := \dim N_T - \dim N_{T^*}$$

gegeben.

Weiterhin induziert $\bar{\cdot} : \mathcal{M}_c \longrightarrow \mathcal{M}_c$ Abbildungen $\bar{\cdot} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ und $\bar{\cdot} : \mathcal{F}\mathcal{M}_c \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}_c$. Somit sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{F}\mathcal{M}_c$ Reelle Räume.

Sei X ein kompakter, metrischer, Reeller Raum und sei $T : X \longrightarrow \mathcal{M}_c$ eine Reelle, stetige Abbildung.

Eine Projektion $E \in \mathcal{M}_c$ heißt eine Wahl für T , wenn gilt

- (a) $1 - E$ ist endlich
- (b) $T_x E(\mathcal{H}_c)$ ist für alle $x \in X$ abgeschlossen
- (c) $\inf (N_{T_x}, E) = 0$ für alle $x \in X$.

Lemma 2.4.2 Zu jeder Reellen, stetigen Abbildung $T : X \longrightarrow \mathcal{M}_c$ existiert eine reelle Wahl G .

Beweis: Nach Breuer [9, Ch. III, Lemma 1] existiert für T eine Wahl E ; $\bar{E}$ ist dann ebenfalls eine Wahl für T , weil T Reell (d.h. $\overline{T_x} = T_x$) ist. Also ist auch $G := \inf (E, \bar{E})$ eine Wahl für T .

q.e.d.

Sei G eine reelle Wahl für die Reelle stetige Abbildung $T : X \longrightarrow \mathcal{M}_c$. Wir definieren nun ein Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel $\mathcal{S}_{TG}^\perp$ über X , dessen Faser über $x \in X$ durch

$$(3) \quad (\mathcal{S}_{TG}^\perp)_x = \mathcal{H}_c \ominus T_x G(\mathcal{H}_c) = R_{T_x G}^\perp(\mathcal{H}_c)$$

gegeben ist. Wir können zunächst O.B.d.A. annehmen, daß X zusammenhängend ist. Die Abbildung

$$(4) \quad r_{TG}^\perp : X \longrightarrow \mathcal{PM}_e$$

definiert durch

$$(5) \quad r_{TG}^\perp(x) := R_{T_x G}^\perp = 1 - R_{T_x G}$$

ist Reell und stetig. Außerdem ist $R_{T_x G}^\perp$ für alle $x \in X$ eine endliche Projektion. Weil X zusammenhängend ist, gibt es eine endliche Projektion $F \in \mathcal{M}_e$, so daß $r_{TG}^\perp(X)$ in der Graßmann'schen $\mathcal{G}_F$ von F enthalten ist. Setzen wir

$$(6) \quad \mathcal{S}_{TG}^\perp := (r_{TG})^* (\mathcal{L}_F)$$

so ist $\mathcal{S}_{TG}^\perp$ ein endliches, Reelles $\mathcal{M}_e$ -Vektorbündel über X , das (3) erfüllt.

Lemma 2.4.2 Seien G', G reelle Wahlen für T und $G' \geq G$.

Dann gilt

$$(7) \quad \mathcal{S}_{TG}^\perp := \mathcal{S}_{TG'}^\perp \oplus (X \times (G' - G)(\mathcal{H}_e))$$

und

$$(8) \quad \mathcal{S}_{TG}^\perp \oplus (X \times (1-G)(\mathcal{H}_e)) \cong \mathcal{S}_{TG'}^\perp \oplus (X \times (1-G)(\mathcal{H}_e))$$

Beweis: (8) folgt sofort aus (7); es reicht deshalb (7) zu beweisen. Sei $TG' = U|TG'|$ die Polarzerlegung von TG' ; dann ist $U : X \rightarrow \mathcal{FM}_e$ eine Reelle, stetige Abbildung. Es gilt für jedes $x \in X$

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_e \ominus U_x G(\mathcal{H}_e) &= \mathcal{H} \ominus U_x G'(\mathcal{H}_e) \oplus U_x (G'(\mathcal{H}_e) \ominus G(\mathcal{H}_e)) , \\ &= \mathcal{H} \ominus T_x G'(\mathcal{H}_e) \oplus U_x ((G'-G)(\mathcal{H}_e)) \end{aligned}$$

also ist

$$(10) \quad \mathcal{S}_{UG}^\perp \cong \mathcal{S}_{TG'}^\perp \oplus (X \times (G'-G)(\mathcal{H}_e))$$

Weiterhin ist $|T_x G'| \in G' \mathcal{M}_e G'$ für alle $x \in X$ regulär. Wegen $G' \sim 1$ ist $G' \mathcal{M}_e G'$ eigentlich unendlich; also gibt es eine Reelle Homotopie

$$(11) \quad H_t : X \longrightarrow G' \mathcal{M}_\epsilon G'$$

von X in die reguläre Gruppe von $G' \mathcal{M}_\epsilon G'$ mit $H_0 = |TG'|$ und $H_1(x) = G'$ für alle $x \in X$.

Also ist

$$(12) \quad h_t : X \longrightarrow P\mathcal{M}_\epsilon, \quad 0 \leq t \leq 1$$

definiert durch

$$(13) \quad h_t(x) := 1 - R_{U_x H_t(x) G} \quad 0 \leq t \leq 1$$

eine Reelle Homotopie mit

$$(14) \quad h_0(x) = 1 - R_{T_x G}$$

und

$$(15) \quad h_1(x) = 1 - R_{U_x G}$$

für alle $x \in X$. Damit folgt

$$(16) \quad \mathcal{S}_{TG}^\perp \cong \mathcal{S}_{UG}^\perp \cong \mathcal{S}_{TG'}^\perp \oplus (X \times (G'-G)(\mathcal{H}_\epsilon))$$

q.e.d.

Sei $T : X \longrightarrow \mathcal{M}_\epsilon$ Reell und stetig und G eine reelle Wahl für T . Dann definieren wir

$$(17) \quad \text{Index } T := \left[X \times (1-G)(\mathcal{H}_\epsilon) \right]_{\mathcal{M}_\epsilon} - \left[\mathcal{S}_{TG}^\perp \right]_{\mathcal{M}_\epsilon}.$$

Nach Lemma 2.4.3 ist Index T unabhängig von der Wahl G . Wir zeigen nun, daß Index T nur von der Homotopieklasse von T abhängt.

Satz 2.4.4 Sei X ein kompakter, metrischer und Reeller Raum und sei $T_t : X \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}_\epsilon$, $0 \leq t \leq 1$ eine Reelle Homotopie. Dann gilt

$$\text{Index } T_0 = \text{Index } T_1.$$

Beweis: Sei O.B.d.A. X zusammenhängend. Wir definieren

$$T : X \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}_\epsilon \text{ durch } T(x,t) := T_t(x).$$

Weil $X \times [0,1]$ ein kompakter, metrischer und Reeller Raum ist, gibt es eine reelle Wahl G für T ; G ist offen-
bar für jede Abbildung T_t , $0 \leq t \leq 1$, eine Wahl.
Wir definieren

$$(18) \quad r_{T_t G}^\perp : X \longrightarrow \mathcal{PM}_\mathbb{C}$$

durch

$$(19) \quad r_{T_t G}^\perp(x) := R_{T_t(x)G}^\perp = R_{T(x,t)G}^\perp$$

Weil $X \times [0,1]$ zusammenhängend ist, gibt es eine Projek-
tion $F \in \mathcal{M}_\mathbb{C}$, so daß $r_{T_t G}^\perp$, $0 \leq t \leq 1$, eine Reelle Abbil-
dung von X in die Graßmann'sche $\mathcal{G}_F$ ist; $r_{T_t G}^\perp$, $0 \leq t \leq 1$ ist
deshalb eine Reelle Homotopie. Also folgt nach Satz 2.2.3

$$(20) \quad S_{T_0 G}^\perp = (r_{T_0 G}^\perp)^*(\mathcal{L}_F) \cong (r_{T_1 G}^\perp)^*(\mathcal{L}_F) = S_{T_1 G}^\perp$$

und somit

$$\begin{aligned} (21) \quad \text{Index } T_0 &= [X \times (1-G)(\mathcal{H}_\mathbb{C})]_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}^\perp [S_{T_0 G}^\perp]_{\mathcal{M}_\mathbb{C}} \\ &= [X \times (1-G)(\mathcal{H}_\mathbb{C})]_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}^\perp [S_{T_1 G}^\perp]_{\mathcal{M}_\mathbb{C}} \\ &= \text{Index } T_1 \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 2.4.5 Sei $\mathcal{M}_\mathbb{C}^+$ der Raum der positiven hermiteschen Ele-
mente von $\mathcal{M}_\mathbb{C}$. Dann ist $\mathcal{F}(\mathcal{M}_\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_\mathbb{C}^+$ Reell zusammen-
ziehbar.

Beweis: Die Homotopie

$$(22) \quad f_t : \mathcal{F}(\mathcal{M}_\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_\mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}_\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_\mathbb{C}^+$$

definiert durch

$$(23) \quad f_t(T) := t \cdot 1 + (1-t)T \quad 0 \leq t \leq 1$$

ist Reell und es gilt $f_0 = \text{id}$, $f_1(T) = 1$ für alle

$$T \in \mathcal{FM}_c \cap \mathcal{M}_c^+.$$

q.e.d.

Satz 2.4.6 Sei X ein kompakter, metrischer und Reeller Raum und seien S, T Reelle stetige Abbildungen von X in $\mathcal{FM}_c$. Dann sind S^* und TS ebenfalls Reelle stetige Abbildungen von X in $\mathcal{FM}_c$ und es gilt

$$(24) \quad \text{Index } TS = \text{Index } T + \text{Index } S$$

$$(25) \quad \text{Index } S^* = - \text{Index } S$$

Beweis: Nach Satz 2.4.1 sind S^* und TS Reelle stetige Abbildungen von X in $\mathcal{FM}_c$. (25) folgt sofort aus Lemma 2.4.5 und (24). Es bleibt deshalb nur noch (24) zu beweisen.

Sei G eine reelle Wahl für T und $TG = U |TG|$ die Polarzerlegung von TG . U ist nach Satz 1.1.6 ebenfalls eine Reelle stetige Abbildung. Sei H eine reelle Wahl für GS ; dann ist H auch eine reelle Wahl für UGS . Weiterhin gilt

$$(26) \quad \mathcal{K}_c \ominus U_X GS_X H(\mathcal{K}_c) = (\mathcal{K}_c \ominus U_X G(\mathcal{K}_c)) + U_X (G(\mathcal{K}_c) \ominus GS_X H(\mathcal{K}_c)),$$

also folgt

$$(27) \quad \mathcal{S}_{UGSH}^\perp \approx \mathcal{S}_{UG}^\perp \oplus (\mathcal{S}_{GSH}^\perp \ominus (X \times (1-G)(\mathcal{K}_c)))$$

und damit

$$\text{Index } TS = \text{Index } UGS = [X \times (1-H)(\mathcal{K}_c)]_{\mathcal{M}_c} - [\mathcal{S}_{GSH}^\perp]_{\mathcal{M}_c} +$$

$$\begin{aligned} (28) \quad & [X \times (1-G)(\mathcal{K}_c)]_{\mathcal{M}_c} - [\mathcal{S}_{UG}^\perp]_{\mathcal{M}_c} \\ &= \text{Index } GS + \text{Index } U \\ &= \text{Index } S + \text{Index } T \end{aligned}$$

weil GS bzw. U nach Lemma 2.4.5 zu S bzw. T Reell homotop sind.

q.e.d.

Sei $C(X, \mathcal{M}_c)$ die Halbgruppe der Reellen stetigen Abbildungen von X in $\mathcal{M}_c$ und $[X, \mathcal{M}_c]$ die Halbgruppe der Reellen Homotopieklassen von X in $\mathcal{M}_c$. Sei $S \in C(X, \mathcal{M}_c)$; dann bezeichne $[S]$ die Reelle Homotopieklasse von S . Nach Lemma 2.4.5 ist $[S]^*$ ein zweiseitiges Inverses von $[S]$; also ist $[X, \mathcal{M}_c]$ eine Gruppe. Aus Satz 2.4.6 folgt, daß

$$(29) \quad \text{Index} : C(X, \mathcal{M}_c) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_c}(X)$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$(30) \quad \text{Index} : [X, \mathcal{M}_c] \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_c}(X)$$

induziert.

Satz 2.4.7 Sei X ein kompakter, metrischer, Reeller Raum.

Dann ist der Gruppenhomomorphismus

$$(31) \quad \text{Index} : [X, \mathcal{M}_c] \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_c}(X)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $T \in C(X, \mathcal{M}_c)$ und $\text{Index } T = 0$, d.h.

$$(32) \quad [X \times (1-G)(\mathcal{K}_c)]_{\mathcal{M}_c} = [S_{TG}^\perp]_{\mathcal{M}_c}.$$

Dann gibt es ein endliches Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel η über X , so daß gilt:

$$(33) \quad (X \times (1-G)(\mathcal{K}_c)) \oplus \eta \cong S_{TG}^\perp \oplus \eta.$$

Nach Satz 2.3.3 gibt es eine endliche reelle Projektion H' , so daß

$$(34) \quad (X \times (1-G)(\mathcal{K}_c)) \oplus (X \times H'(\mathcal{K}_c)) \cong S_{TG}^\perp \oplus (X \times H'(\mathcal{K}_c))$$

gilt. Wegen $G \sim 1$ können wir annehmen, daß $H' \leq G$ ist; dann ist $H = G - H'$ ebenfalls eine reelle Wahl für T . Mit Hilfe von Lemma 2.4.3 folgt

$$(35) \quad X \times (1-H)(\mathcal{H}_c) \cong \mathcal{S}_{TH}^\perp$$

Sei $V : X \times (1-H)(\mathcal{H}_c) \rightarrow \mathcal{S}_{TH}^\perp$ dieser Reelle $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus. Dann ist $x \mapsto V_x + T_x H$ eine Reelle stetige Abbildung von X in die reguläre Gruppe von $\mathcal{M}_c$; da diese Reell zusammenziehbar ist, ist die Abbildung $x \mapsto V_x + T_x H$ Reell homotop zur konstanten Abbildung $x \mapsto 1 \in \mathcal{M}_c$.

Andererseits ist $f_t := tV + TH$, $0 \leq t \leq 1$ eine Reelle Homotopie mit $f_0 = H$ und $f_1 = V + TH$. Also ist T Reell homotop zur konstanten Abbildung und Index somit injektiv.

Wir zeigen nun, daß Index surjektiv ist. Es reicht zu zeigen, daß zu jedem Element $[\xi]_{\mathcal{M}_c} \in KR_{\mathcal{M}_c}(X)$ eine Reelle Abbildung $T : X \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{M}_c$ mit Index $T = [\xi]_{\mathcal{M}_c}$ existiert.

Nach Satz 2.2.2 können wir O.B.d.A. annehmen, daß ξ ein Unterbündel von $X \times \mathcal{H}_c$ ist; nach Satz 2.2.7 gibt es einen Reellen $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus

$$(36) \quad V : X \times \mathcal{H}_c \longrightarrow (X \times \mathcal{H}_c) \oplus \xi.$$

Dann ist $x \mapsto V_x$ eine Reelle stetige Abbildung von X in $\mathcal{F}\mathcal{M}_c$. Setzen wir $T = V^*$, so ist $1 \in \mathcal{M}_c$ eine Wahl für T und es gilt:

$$(37) \quad \text{Index } T = - \text{Index } V = [\xi]_{\mathcal{M}_c}$$

q.e.d.

Kapitel III

Der Periodizitätssatz

In § 1 beweisen wir den Periodizitätssatz für die $KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}$ -Theorie, der die folgende Aussage macht.

Es sei X ein lokalkompakter, Reeller Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Versehen wir $R^2 = \mathbb{C}$ mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Reellen Struktur, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$(1) \quad \beta : KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}(X) \longrightarrow KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}(R^2 \times X)$$

Der Beweis hierfür lehnt sich eng an den von Breuer in [9] gegebenen an. Wir machen jedoch etwas mehr von der Theorie der Töplitzoperatoren Gebrauch, so daß der Beweis dem von Atiyah [3] ähnlicher ist.

Es sei $R^{p,q} = R^q + iR^p$ der Reelle Raum mit der Involution $(r,s) \mapsto (r,-s)$ und $S^{p,q}$ der Rand der Einheitskugel von $R^{p,q}$. Aus der exakten Kohomologiesequenz der $KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}$ -Theorie leiten wir dann in §2 die exakte Sequenz

$$(2) \quad 0 \rightarrow KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}^{-q}(X) \rightarrow KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}^{-q}(X \times S^{4,0}) \rightarrow KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}^{5-q}(X) \rightarrow 0$$

her. Mit Hilfe von β konstruieren wir einen Isomorphismus

$$\gamma_q : KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}^{-q}(X \times S^{4,0}) \longrightarrow KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}^{-q-8}(X \times S^{4,0}) ;$$

die Exaktheit von (2) und γ_q zeigen dann, daß es einen Isomorphismus

$$KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}(X) \longrightarrow KR_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}^{-8}(X)$$

gibt. Falls die Involution von X die Identität ist, so folgt daraus die Existenz des Periodizitätsisomorphismus

$$KO_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}(X) \cong KO_{\mathbb{M}_\mathbb{C}}(R^8 \times X)$$

§ 1 Der Periodizitätssatz für Reelle $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel.

Sei $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$.
Dann definieren wir einen Homöomorphismus $\tau : S^2 \longrightarrow S^2$
durch $\tau(z) = \bar{z}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\tau(\infty) = \infty$. S^2 ist somit ein
Reeller Raum. Weiterhin setzen wir

$$D_0 := \{z \in S^2 \mid |z| \leq 1$$

$$D_\infty := \{z \in S^2 \mid |z| \geq 1$$

Es ist klar, daß D_0 , D_∞ und $S^1 := D_0 \cap D_\infty$ Reelle Unterräume
von S^2 sind.

Satz 3.1.1 Seien ξ_0, ξ_∞ endliche Reelle $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel
über $D_0 \times X$, $D_\infty \times X$ und sei

$$\psi : \xi_0|_{S^1 \times X} \longrightarrow \xi_\infty|_{S^1 \times X}$$

ein Reeller $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus. Dann gibt es ein Reelles
 $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel ξ über $S^2 \times X$ und Reelle $\mathcal{M}_c$ -Isomor-
phismen

$$U_0 : \xi|_{D_0 \times X} \longrightarrow \xi_0$$

$$U_\infty : \xi|_{D_\infty \times X} \longrightarrow \xi_\infty$$

so daß auf $\xi_0|_{S^1 \times X}$ $\psi = U_\infty \circ U_0^{-1}$ gilt. Außerdem
ist ξ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien O.B.d.A. die Faserdimensionen von ξ_0, ξ_∞ kon-
stant. Nach Satz 2.2.3 gibt es dann eine reelle Pro-
jektion $G \in \mathcal{M}$ und Reelle Abbildungen $f_0 : D_0 \times X \rightarrow \mathcal{G}_G$,
 $f_\infty : D_\infty \times X \rightarrow \mathcal{G}_G$, so daß $\xi_0 \cong f_0^*(\mathcal{L}_G)$ und
 $\xi_\infty \cong f_\infty^*(\mathcal{L}_G)$ gilt.

Seien

$$v_0 : \xi_0 \longrightarrow f_0^*(\mathcal{L}_G) \quad \text{und} \quad v_\infty : \xi_\infty \longrightarrow f_\infty^*(\mathcal{L}_G)$$

die jeweiligen Reellen $\mathcal{M}_\epsilon$ -Isomorphismen.

Wir setzen

$$\psi := v_\infty \circ \varphi \cdot v_0^{-1} : f_0^*(\mathcal{X}_G) \Big|_{S^1 \times X} \longrightarrow f_\infty^*(\mathcal{X}_G) \Big|_{S^1 \times X}.$$

Weiterhin definieren wir

$$\tilde{f}_0 : S^1 \times X \longrightarrow \mathcal{G}_{1-G} \quad \text{durch} \quad \tilde{f}_0(x) := 1 - f_0(x)$$

$$\tilde{f}_\infty : S^1 \times X \longrightarrow \mathcal{G}_{1-G} \quad \text{durch} \quad \tilde{f}_\infty(x) := 1 - f_\infty(x).$$

Nun gilt $1-G \sim 1$, da G endlich und $\mathcal{M}_c$ eigentlich unendlich ist. Also gibt es nach Satz 2.2.7 einen Reellen $\mathcal{M}_\epsilon$ -Isomorphismus

$$\tilde{\psi} : \tilde{f}_0^*(\mathcal{X}_{1-G}) \longrightarrow \tilde{f}_\infty^*(\mathcal{X}_{1-G}).$$

Betrachten wir $\psi, \tilde{\psi}$ als stetige Reelle Abbildungen von $S^1 \times X$ in den Raum der partiellen Isometrien von $\mathcal{M}_\epsilon$, so gilt offenbar

$$(1) \quad f_0(z, x) = \psi^*(z, x) \psi(z, x) \quad f_\infty(z, x) = \psi(z, x) \psi^*(z, x)$$

$$(2) \quad \tilde{f}_0(z, x) = \tilde{\psi}^*(z, x) \tilde{\psi}(z, x) \quad \tilde{f}_\infty(z, x) = \tilde{\psi}(z, x) \tilde{\psi}^*(z, x).$$

Definieren wir

$$(3) \quad \tilde{T} : S^1 \times X \longrightarrow (\mathcal{M}_\epsilon)$$

durch

$$(4) \quad \tilde{T}(z, x) := \psi(z, x) + \tilde{\psi}(z, x)$$

so folgt

$$(5) \quad f_\infty(z, x) = \tilde{T}(z, x) f_0(z, x) \tilde{T}^*(z, x).$$

Weil die unitäre Gruppe Reell zusammenziehbar ist, gibt es eine Reelle Homotopie

$$(6) \quad \tilde{T}_t : S^1 \times X \longrightarrow (\mathcal{M}_\epsilon) \quad 0 \leq t \leq 1$$

mit

$$\tilde{T}_0(z, x) = 1$$

und

$$\tilde{T}_1(z, x) = \tilde{T}(z, x)$$

für alle $(z, x) \in S^1 \times X$.

Wir definieren nun die Erweiterung

$$(7) \quad T : D_0 \times X \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{M}_\epsilon)$$

durch

$$(8) \quad T(z, x) = \begin{cases} \tilde{T}_{|z|}(e^{i \arg z}, x) & 0 < z \leq 1 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Es gilt $T(\bar{z}, \bar{x}) = \overline{T(z, x)}$; also ist T Reell.

Erklären wir

$$f : S^2 \times X \longrightarrow \mathcal{G}_G$$

durch

$$(9) \quad f(z, x) := \begin{cases} T(z, x) f_0(z, x) T^*(z, x) & (z, x) \in D_0 \times X \\ f_\infty(z, x) & (z, x) \in D_\infty \times X \end{cases}$$

so ist f wegen (5) wohldefiniert, stetig und Reell.

Wir setzen nun

$$(10) \quad \xi := f^*(\mathcal{L}_G),$$

dann induziert T einen Reellen $\mathcal{M}_\epsilon$ -Isomorphismus

$$(11) \quad w_0 : \xi|_{D_0 \times X} \longrightarrow f_0^*(\mathcal{L}_G).$$

Sei

$$(12) \quad w_\infty : \xi|_{D_\infty \times X} \longrightarrow f_\infty^*(\mathcal{L}_G)$$

der identische Isomorphismus, dann gilt

$$(13) \quad \psi = w_\infty w_0^{-1} \text{ (eingeschränkt auf } f_0^*(\mathcal{L}_G)|_{S^1 \times X})$$

Daher ergibt sich mit $U_0 = v_0^{-1} w_0, U_\infty := v_\infty^{-1} w_\infty$

$$(14) \quad \psi = U_\infty \cdot U_0^{-1}$$

und damit die behauptete Existenz.

Sei nun ξ' ein weiteres Reelles $\mathcal{M}_\epsilon$ -Vektorbündel über $S^2 \times X$ und

$$(15) \quad U'_0 : \xi'|_{D_0 \times X} \longrightarrow \xi_0$$

$$U'_\infty : \xi'|_{D_\infty \times X} \longrightarrow \xi_\infty$$

$\mathcal{M}_c$ -Isomorphismen, so daß $\varphi = U_\infty' (U_0')^{-1}$ (eingeschränkt auf $\xi_0 | S^1 \times X$).

Dann stimmen die Isomorphismen

$$(16) \quad U_0^{-1} U_0' : \xi' | D_0 \times X \longrightarrow \xi | D_0 \times X$$

und

$$(17) \quad U_\infty^{-1} U_\infty' : \xi' | D_\infty \times X \longrightarrow \xi | D_\infty \times X$$

auf $\xi' | S^1 \times X$ überein und führen deshalb zu einem Reellen $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus von ξ' auf ξ .

q.e.d.

Def. 3.1.2 Das Bündel ξ aus Satz 3.1.1 wird mit $\xi_0 \cup_\varphi \xi_\infty$ bezeichnet.

Wir zeigen nun, daß die Isomorphieklasse von ξ nur von der Homotopieklasse von φ abhängt. Der Beweis hierfür ist wörtlich derselbe, wie der von Husemoller [17,9.7.6]. Wir bringen ihn hier nur der Vollständigkeit wegen.

Satz 3.1.3 Seien ξ_0, ξ_∞ wie in Satz 3.1.1. Dann hängt die $\mathcal{M}_c$ -Isomorphieklasse des $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündels $\xi = \xi_0 \cup_\varphi \xi_\infty$ nur von der Homotopieklasse des $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismusses φ ab.

Beweis: Sei $\varphi_t : \xi_0 | S_1 \times X \longrightarrow \xi_\infty | S_1 \times X$ eine Reelle Homotopie und sei

$$\pi : S^2 \times X \times [0,1] \longrightarrow S^2 \times X$$

die natürliche Projektion. Wir definieren

$$(18) \quad \psi : \pi^*(\xi_0) | S^1 \times X \times [0,1] \longrightarrow \pi^*(\xi_\infty) | S^1 \times X \times [0,1]$$

faserweise durch

$$(19) \quad \psi(z, x, t)(z, x, t, v) := (z, x, t, \varphi_t(z, x)(v)), \quad v \in (\xi_0)_x$$

ψ ist ein Reeller $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus; also existiert

nach Satz 3.1.1 das Bündel

$$(20) \quad \pi^*(\xi_0) \cup_{\varphi} \pi^*(\xi_{\infty})$$

Definieren wir

$$i_0: S^2 \times X \rightarrow S^2 \times X \times [0,1] \text{ durch } i_0(z,x) := (z,x,0)$$

und

$$i_1: S^2 \times X \rightarrow S^2 \times X \times [0,1] \text{ durch } i_1(z,x) = (z,x,1),$$

so ist i_0 Reell homotop zu i_1 . Weiterhin gilt

$$\xi_0 \cup_{\varphi} \xi = i_0^*(\pi^*\xi_0 \cup_{\varphi} \pi^*(\xi_{\infty})) \cong i_1^*(\pi^*\xi_0 \cup_{\varphi} \pi^*\xi_{\infty}) \cong \xi_0 \cup_{\varphi_1} \xi_{\infty}$$

q.e.d.

Satz 3.1.1 ermöglicht es uns Reelle $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über $S^2 \times X$ zu charakterisieren.

Satz 3.1.4 Seien $\pi_0: D_0 \times X \rightarrow X$, $\pi_{\infty}: D_{\infty} \times X \rightarrow X$ die natürlichen Projektionen und ξ ein endliches Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel über $S^2 \times X$. Dann gibt es ein endliches Reelles $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Vektorbündel ζ über X und einen bis auf Homotopie eindeutig bestimmten Reellen $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -Isomorphismus

$$\varphi: \pi_0^*(\zeta) \big|_{S^1 \times X} \rightarrow \pi_{\infty}^*(\zeta) \big|_{S^1 \times X}$$

so daß gilt

- a) $\varphi \big|_{(\pi_0^*(\zeta) \big|_{\{1\} \times X})}$ ist der identische Isomorphismus
- b) ξ ist Reell isomorph zu $\pi_0^*(\zeta) \cup_{\varphi} \pi_{\infty}^*(\zeta)$.

Beweis: Wir betrachten die Reelle Abbildung $s: X \rightarrow S^2 \times X$, die durch $s(x) := (1,x)$ gegeben ist, und setzen $\zeta := s^*(\xi)$. Offenbar ist

$$h_t: D_0 \times X \rightarrow D_0 \times X \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(21) \quad h_t(z, x) := (t1 + (1-t)z, x) \quad (z, x) \in D_0 \times X$$

eine Reelle Homotopie mit

$$(22) \quad h_0 = \text{Id}_{D_0 \times X}, \quad h_1 = s \circ \pi_0$$

Also gilt

$$(23) \quad \xi|_{D_0 \times X} \cong (\text{id})^*(\xi)|_{D_0 \times X} \cong (s \circ \pi_0)^*(\xi) \cong \pi_0^* s^*(\xi) \cong \pi_0^*(\xi).$$

Ebenso zeigt man

$$(24) \quad \xi|_{D_\infty \times X} \cong \pi_\infty^*(\xi)$$

Seien

$$(25) \quad \varphi_0 : \xi|_{D_0 \times X} \longrightarrow \pi_0^*(\xi)$$

$$(26) \quad \varphi_\infty : \xi|_{D_\infty \times X} \longrightarrow \pi_\infty^*(\xi)$$

die in (23), (24) erklärten Isomorphismen.

Es ist klar, daß diese Isomorphismen die natürlichen Isomorphismen

$$(27) \quad \xi|_{\{1\} \times X} \longrightarrow \pi_0^*(\xi)|_{\{1\} \times X}$$

und

$$(28) \quad \xi|_{\{1\} \times X} \longrightarrow \pi_\infty^*(\xi)|_{\{1\} \times X}$$

fortsetzen. Insbesondere ist

$$(29) \quad \varphi_\infty \varphi_0^{-1} : \pi_0^*(\xi)|_{\{1\} \times X} \longrightarrow \pi_\infty^*(\xi)|_{\{1\} \times X}$$

die Identität. Sind nun

$$(30) \quad \varphi'_0 : \xi|_{D_0 \times X} \longrightarrow \pi_0^*(\xi)$$

$$(31) \quad \varphi'_\infty : \xi|_{D_\infty \times X} \longrightarrow \pi_\infty^*(\xi)$$

zwei weitere Fortsetzungen von (27), (28), so stimmen

$$(32) \quad \varphi_0 \circ \varphi_0'^{-1} : \pi_0^*(\xi) \longrightarrow \pi_0^*(\xi)$$

und

$$(33) \quad \varphi_\infty \circ \varphi_\infty'^{-1} : \pi_\infty^*(\xi) \longrightarrow \pi_\infty^*(\xi)$$

über $\{1\} \times X$ mit der Identität überein. Wir müssen zeigen, daß $\varphi_0 \circ \varphi_0'^{-1}$, $\varphi_\infty \circ \varphi_\infty'^{-1}$ über $D_0 \times X$, $D_\infty \times X$ homotop zur Identität sind. Die natürliche Projektion

$$(34) \quad \pi : D_0 x \times x \xi \longrightarrow \xi$$

induziert wegen $\pi_0^*(\xi) \subset D_0 x \times x \xi$ eine Reelle Abbildung

$$(35) \quad \pi : \pi_0^*(\xi) \longrightarrow \xi$$

Also definieren wir eine Reelle Homotopie

$$(36) \quad \alpha_t : \pi_0^*(\xi) \longrightarrow \pi_0^*(\xi)$$

durch

$$(37) \quad \alpha_t(x, z, v) := (x, z, \pi_0 \varphi_0 \cdot \varphi_0'^{-1}(t1 + (1-t)z, x, v))$$

Damit ist wegen $\alpha_0 = \varphi_0 \varphi_0'^{-1}$ und $\alpha_1 = \text{Id}$

$\varphi_0 \varphi_0'^{-1}$ homotop zur Identität. Analog zeigt man, daß $\varphi_\infty \varphi_\infty'^{-1}$ Reell homotop zur identischen Abbildung ist.

Der Isomorphismus

$$(38) \quad \varphi : \varphi_0 \varphi_0'^{-1} : \pi_0^*(\xi) | S^1 x \times \longrightarrow \pi_\infty^*(\xi) | S^1 x \times$$

ist deshalb bis auf Homotopie wohlbestimmt.

Weiterhin folgt

$$\xi \cong \xi | D_0 x \times \text{Id} \bigcup_{S^1 x \times} \xi | D_\infty x \times \cong \pi_0^*(\xi) \bigcup_{\varphi} \pi_\infty^*(\xi).$$

q.e.d.

Das Reelle $\mathcal{M}_\mathbb{C}$ -Vektorbündel $\xi \cong \pi_0^*(\xi) \bigcup_{\varphi} \pi_\infty^*(\xi)$ bezeichnen wir von nun an abkürzend mit $[\xi, \varphi]$.

Reelle $\mathcal{M}_\mathbb{C}$ -Vektorbündel über $S^2 x \times$ können also durch ein Reelles $\mathcal{M}_\mathbb{C}$ -Vektorbündel ξ über X und einen Isomorphismus

$$(39) \quad \varphi : \pi_0^*(\xi) | S^1 x \times \longrightarrow \pi_\infty^* | S^1 x \times$$

beschrieben werden. Im Weiteren soll daher der Isomorphismus φ analysiert werden. Wir wenden uns zunächst einem formalen Aspekt von φ zu. Sei

$$(40) \quad \pi : S^1 x \times \longrightarrow X$$

die natürliche Projektion. Weil $\pi_0^*(\xi) | S^1 x \times \cong \pi^*(\xi)$

und $\pi_\infty^*(\xi) | S^1 \times X \cong \pi^*(\xi)$ gilt, können wir φ als einen Reellen $\mathcal{M}_d$ -Isomorphismus

$$(41) \quad \varphi : \pi^*(\xi) \longrightarrow \pi^*(\xi)$$

und somit auch als einen Reellen Schnitt

$$(42) \quad \varphi : S^1 \times X \longrightarrow \text{end}(\pi^*(\xi))$$

auffassen. Einen solchen Reellen Schnitt können wir auch als eine Abbildung

$$(43) \quad \varphi : S^1 \times X \longrightarrow \text{end } \xi$$

betrachten, für die

$$(44) \quad \varphi(z, x) \in \text{end } \xi_x \quad (z, x) \in S^1 \times X$$

und

$$(45) \quad \varphi(\bar{z}, \bar{x}) = \overline{\varphi(z, x)}$$

gilt.

Satz 3.1.5 Seien ξ, ζ, φ wie in Satz 3.1.4 Dann gilt:

- (a) φ läßt sich auf eindeutige Weise ein unitäres Element $\tilde{\varphi}$ der C^* -Algebra $\Gamma C(S^1, \text{end } \xi)$ zuordnen.
- (b) Sind φ, ψ homotop, so liegen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ in derselben Zusammenhangskomponente von $\Gamma C(S^1, \text{end } \xi)$
- (c) $\Gamma C(S^1, \text{end } \xi)$ läßt sich mit einer Reellen Struktur versehen, so daß $\tilde{\varphi}$ Reell ist.

Beweis: (a) Setze für $(z, x) \in S^1 \times X$

$$\tilde{\varphi}(x)(z) := \varphi(x, z)$$

(b) Sei

$$\tilde{\Phi} : S^1 \times X \times [0, 1] \longrightarrow \text{end } \xi$$

eine Homotopie mit $\tilde{\Phi}(z, x, 0) = \varphi(z, x),$

$$\tilde{\Phi}(z, x, 1) = \psi(z, x)$$

$\tilde{\Phi}$ induziert eine Abbildung

$$\tilde{\tilde{\Phi}} : [0, 1] \longrightarrow \Gamma C(S^1, \text{end } \xi)$$

die für $(z, x, t) \in S^1 \times X \times [0, 1]$ definiert ist durch

$$((\tilde{\tilde{\Phi}}(t))(x))(z) := \tilde{\Phi}(z, x, t)$$

mit

$$\tilde{\Phi}(0) = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\Phi}(1) = \tilde{\psi}$$

Also liegen $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ in derselben Wegzusammenhangskomponente.

- (c) Das C^* Algebrabündel $C(S^1, \text{end } \xi)$ trägt eine Reelle Struktur, die für $f \in C(S^1, \text{end } \xi_x)$ durch

$$(46) \quad \overline{f}(z) := \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in S^1$$

gegeben ist. Für $s \in \Gamma C(S^1, \text{end } \xi)$ definieren wir

$$(47) \quad \overline{s}(x) := \overline{s(\overline{x})}, \quad x \in X.$$

Dann gilt mit $(z, x) \in S^1 \times X$

$$(48) \quad \overline{\tilde{\varphi}}(x)(z) = \overline{\tilde{\varphi}(\overline{x})(z)} = \overline{\tilde{\varphi}(\overline{x})(\overline{z})} = \overline{\varphi(\overline{z}, \overline{x})} = \varphi(z, x) = \varphi(x)(z).$$

Es folgt $\overline{\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi}$, d.h. $\tilde{\varphi}$ ist Reell.

q.e.d.

Im Folgenden betrachten wir nun $\tilde{\varphi}$, wobei wir zur Vereinfachung φ statt $\tilde{\varphi}$ schreiben. Für die weitere Analyse der Abbildung φ benötigen wir die Theorie der Toeplitzoperatoren; Einzelheiten hierzu können dem Buch von Douglas [14] und [11] entnommen werden.

Sei $L^2(S^1)$ der Hilbertraum der quadratisch integrierbaren komplexwertigen Funktionen auf der 1-Sphäre S^1 , dann ist die Menge der Funktionen $\{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormale Basis von $L^2(S^1)$. Sei H^2 der von den Funktionen $\{z^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ erzeugte abgeschlossene Unterraum von $L^2(S^1)$ und sei

$$(49) \quad P : L^2(S^1) \longrightarrow H^2$$

die Projektion auf diesen Unterraum. Für $\gamma \in C(S^1, \phi)$

definieren wir den Multiplikationsoperator $M_\gamma \in \mathcal{L}(L^2(S^1))$ durch

$$(50) \quad M_\gamma(g) := \gamma g \quad \text{für alle } g \in L^2(S^1)$$

und den Toeplitzoperator $T_\gamma \in \mathcal{L}(H^2)$ durch

$$(51) \quad T_{\psi}(g) := P(M_{\psi}(g))$$

für alle $g \in H^2$. Die Abbildung

$$(52) \quad \zeta: C(S^1, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(H^2)$$

die durch

$$(53) \quad \zeta(\psi) := T_{\psi}, \quad \psi \in C(S^1, \mathbb{C})$$

gegeben ist, ist stetig und $*$ -linear.

Bezeichnen wir mit $K\mathcal{L}(H^2)$ die Menge der kompakten Operatoren von $\mathcal{L}(H^2)$ und mit $\mathcal{I}$ die von den Operatoren T_{ψ} , $\psi \in C(S^1, \mathbb{C})$, erzeugte C^* -Unteralgebra von $\mathcal{L}(H^2)$, so gilt nach einem bekannten Satz von Coburn

[14, Th. 7.23], daß die Sequenz

$$(54) \quad 0 \rightarrow K\mathcal{L}(H^2) \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow C(S^1, \mathbb{C}) \rightarrow 0$$

exakt ist, und ζ als stetigen und $*$ -linearen Querschnitt besitzt.

H^2 , $\mathcal{L}(H^2)$ und $C(S^1, \mathbb{C})$ sind Reelle Räume, wenn wir

$$(55) \quad -: L^2(S^1) \longrightarrow L^2(S^1)$$

durch

$$(56) \quad \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n} z^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \in L^2(S^1),$$

$-: \mathcal{L}(H^2) \rightarrow \mathcal{L}(H^2)$ durch $\overline{T}(g) := \overline{T(\overline{g})}$, $T \in \mathcal{L}(H^2)$, $g \in H^2$

und $-: C(S^1, \mathbb{C}) \rightarrow C(S^1, \mathbb{C})$ durch $\overline{\psi}(z) := \overline{\psi(\overline{z})}$,

$\psi \in C(S^1, \mathbb{C})$, definieren. Bezüglich der Verträglichkeiten der so definierten Abbildungen gilt:

Lemma 3.1.6 Es ist stets $T_{\overline{\psi}} = \overline{T_{\psi}}$ für $\psi \in C(S^1, \mathbb{C})$.

Beweis: Sei ψ_n der n -te Fourierkoeffizient von ψ .

Dann gilt für den n -ten Fourierkoeffizienten von $\overline{\psi}$:

$$\begin{aligned} (\overline{\psi})_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \overline{\psi}(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \overline{\psi(e^{-it})} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{108}{2\pi} - \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \psi(e^{-it}) dt \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 e^{-int} \psi(e^{it}) dt \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(e^{it}) dt \\
& = \overline{(\psi_n)}.
\end{aligned}$$

Also ist $\overline{\psi}$ wohldefiniert und es folgt

$$T_{\overline{\psi}}(g) = P(\overline{\psi}g) = P(\overline{\psi\overline{g}}) = \overline{P(\psi\overline{g})} = \overline{T_{\psi}(\overline{g})} = \overline{T_{\psi}}(g)$$

für alle $g \in H^2$.

q.e.d.

Bevor wir fortfahren, erinnern wir an die Theorie der Tensorprodukte von C^* - bzw. W^* -Algebren. Einzelheiten hierzu können [12] und [24] entnommen werden.

Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ komplexe Hilberträume und $A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}), B \subset \mathcal{L}(\mathcal{K})$ C^* -Unteralgebren. Das algebraische Tensorprodukt $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ ist ein Prähilbertraum, dessen Vervollständigung wir ebenfalls mit $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ bezeichnen.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten das algebraische Tensorprodukt $A \otimes B$ zu einer C^* -Algebra zu machen.

Zum Einen können wir $A \otimes B$ als C^* -Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ auffassen und dann $A \otimes B$ bez. der Operatornorm von $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ vervollständigen. Wir erhalten so eine C^* -Algebra, die wir mit $A \otimes_{Op} B$ bezeichnen.

Zum Anderen können wir A, B auch als abstrakte C^* -Algebren betrachten. Zwei Darstellungen

$$\xi : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\xi})$$

$$\sigma : B \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\sigma})$$

geben dann zu einer Darstellung

$$\mathcal{S} \otimes \mathcal{G} : A \otimes B \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}})$$

Anlaß. Für $z \in A \otimes B$ wird durch

$$\|z\|_* = \sup \{ |\mathcal{S} \otimes \mathcal{G}(z)| \mid \mathcal{S}, \mathcal{G} \text{ Darstellungen von } A, B \}$$

auf $A \otimes B$ eine Norm definiert. Die Vervollständigung von $A \otimes B$ bez. dieser Norm, in Zeichen $\hat{A \otimes B}$, ist eine C^* -Algebra.

Nach Wulfson [27] stimmen auf $A \otimes B$ die beiden hier eingeführten Normen überein. Weiterhin merken wir noch an, daß $\|\cdot\|_*$ die einzige C^* -Norm von $A \otimes B$ ist, sofern A oder B eine Typ I C^* -Algebra ist.

Sei nun ξ ein endliches Reelles $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel über dem Reellen, kompakten Raum X , dann ist $\text{end } \xi_x$ für jedes $x \in X$ eine endliche von Neumann'sche Algebra.

Nach Douglas [15, Prop 2] ist die Sequenz von C^* -Algebren

$$(57) \quad 0 \rightarrow K\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathcal{I} \hat{\otimes} \text{end } \xi_x \xrightarrow{\mathcal{S} \otimes 1} C(S^1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x \rightarrow 0$$

für jedes $x \in X$ exakt. Nach [14, Satz 2.4.3, Satz 2.4.4] ist weiterhin $\mathcal{S} \otimes 1$ ein stetiger und $*$ -linearer Querschnitt von $\mathcal{S} \otimes 1$, d.h. $\mathcal{S} \otimes 1 \circ \mathcal{S} \otimes 1 = \text{Id}$.

$K\mathcal{L}(H^2)$ und $C(S^1, \mathbb{C})$ sind offenbar Typ I C^* -Algebren. Die exakte Sequenz (54) zeigt, daß auch $\mathcal{I}$ eine Typ I C^* -Algebra ist, also $\|\cdot\|_*$ die einzige C^* -Norm auf den jeweiligen C^* -Algebren $K\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x$ bzw. $\mathcal{I} \hat{\otimes} \text{end } \xi_x$ bzw. $C(S^1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x$ ist. Hieraus ergibt sich, daß

$$(58) \quad C(S^1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x \cong C(S^1, \text{end } \xi_x)$$

Der Isomorphismus (58) wird durch

$$(59) \quad \sum_{j=0}^k \gamma_j \otimes A_j \longrightarrow \sum_{j=0}^k \gamma_j A_j$$

$\psi_j \in C(S^1, \mathbb{C})$, $A_j \in \text{end } \xi_x$, geliefert.

Topologisieren wir

$$K\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi := \bigcup_{x \in X} K\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x, \quad \mathcal{T} \hat{\otimes} \text{end } \xi := \bigcup_{x \in X} \mathcal{T} \hat{\otimes} \text{end } \xi_x,$$

$$C(S^1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} \text{end } \xi := \bigcup_{x \in X} C(S^1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x \quad \text{und}$$

$$C(S^1, \text{end } \xi) := \bigcup_{x \in X} C(S^1, \text{end } \xi_x) \text{ auf natürliche Weise,}$$

so erhalten wir eine exakte Sequenz von C^* -Algebrabündeln

$$(60) \quad 0 \longrightarrow K\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi \longrightarrow \mathcal{T} \hat{\otimes} \text{end } \xi \xrightarrow{S \otimes 1} C(S^1, \text{end } \xi) \longrightarrow 0$$

mit dem stetigen Querschnitt $\xi \otimes 1$.

Weiterhin können die eben aufgeführten C^* -Algebrabündel auf natürliche Weise mit einer Reellen Struktur versehen werden, so daß $\xi \otimes 1$, $\xi \otimes 1$ und der Isomorphismus (59) Reelle Abbildungen sind.

Sei $\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x$ das von Neumann Tensorprodukt der von Neumann'schen Algebren $\mathcal{L}(H^2)$ und $\text{end } \xi_x$ und sei

$\mathcal{M}_x$ das Ideal der kompakten Operatoren von $\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x$. Dann gilt nach Breuer [9, Prop. 5]

$$(61) \quad \mathcal{M}_x \cap \mathcal{T} \hat{\otimes} \text{end } \xi_x = K\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x$$

für jedes $x \in X$. Weiterhin ist

$\mathcal{T} \hat{\otimes} \text{end } \xi$ ein Reelles C^* -Algebra Unterbündel von $\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi$.

Def. 3.1.7 Ein Schnitt $s \in \Gamma(\mathcal{T} \hat{\otimes} \text{end } \xi)$ heißt ein Fredholmschnitt, wenn $s(x) \in \mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi_x$ für alle $x \in X$ ein Fredholmoperator ist.

Wir erhalten sofort die folgende Charakterisierung eines Fredholmschnittes.

Satz 3.1.8 $s \in \Gamma(\mathcal{T} \hat{\otimes} \text{end } \xi)$ ist genau dann ein Fredholmschnitt, wenn

$$\Gamma(\xi \otimes 1)(s) \in \Gamma(C(S^1, \text{end } \xi))$$

regulär ist.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus (61), der Exaktheit der Sequenz (60) und Satz 2.4.1

q.e.d.

Wir zeigen nun, daß $\mathcal{L}(H^2) \hat{\otimes} \text{end } \xi$ Reell isomorph zu einem trivialen C^* -Algebrabündel ist.

Sei $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise orthogonalen reellen äquivalenten Projektionen von $\mathcal{M}_c$ und sei

$$\tilde{G} := \sum_{i=1}^{\infty} G_i, \quad G := G_1.$$

Die orthogonale Projektion von H^2 auf den Unterraum $\{\alpha x^n | \alpha \in \mathbb{C}\}$ werde mit e_n bezeichnet. Dann gibt es einen Reellen Isomorphismus

$$(62) \quad \tilde{\Phi} : \tilde{G}(\mathcal{H}_c) \longrightarrow G(\mathcal{H}_c) \hat{\otimes} H^2,$$

der einen Reellen Spatialisomorphismus

$$(63) \quad \tilde{\Phi}^* : \tilde{G} \mathcal{M}_c \tilde{G} \longrightarrow G \mathcal{M}_c G \hat{\otimes} \mathcal{L}(H^2)$$

induziert, so daß

$$(64) \quad \tilde{\Phi}^* (G_n) = G \otimes e_n$$

gilt.

Wir nehmen zunächst an, daß X zusammenhängend ist; dann existiert ein Reeller Atlas $(U_i, \varphi_i, G)_{1 \leq i \leq n}$ von ξ .

Da $\mathcal{M}_c$ eigentlich unendlich ist, gibt es eine Folge von reellen, paarweise orthogonalen Projektionen

$(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $G_n \sim G$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\tilde{G} := \sum_{n=1}^{\infty} G_n$$

und sei $\tilde{\Phi}$ der in (62) angegebene Reelle Isomorphismus. Dann ist $(U_i, \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{\Phi} \varphi_i), \tilde{G})_{1 \leq i \leq n}$ ein Reeller Atlas des

Reellen $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündels $H^2 \otimes \xi$. Gemäß Satz 2.2.7 gibt es einen bis auf Homotopie eindeutig bestimmten Reellen $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus

$$(65) \quad v : H^2 \otimes \xi \longrightarrow X \times \tilde{G}(\mathcal{X}_c),$$

der einen Reellen Spatialisomorphismus induziert

$$(66) \quad v^* : \text{end}(H^2 \otimes \xi) \longrightarrow X \times \tilde{G} \mathcal{M}_c \tilde{G}.$$

Wenden wir den Schnittfunktor an, so erhalten wir nun einen Reellen C^* -Algebrasomorphismus

$$(67) \quad \Gamma(v^*) : (\text{end}(H^2 \otimes \xi)) \rightarrow C(X, \tilde{G} \mathcal{M}_c \tilde{G}).$$

Nach Satz 3.1.8 ist somit $\Gamma(v^*) \circ (\S 3.1)(\varphi)$ eine Reelle stetige Abbildung von X in den Raum der Fredholmoperatoren $\mathcal{F}(\tilde{G} \mathcal{M}_c \tilde{G})$ der reduzierten Algebra $\tilde{G} \mathcal{M}_c \tilde{G}$. Wir benötigen nun noch eine Abbildung, die $\mathcal{F}(\tilde{G} \mathcal{M}_c \tilde{G})$ in $\mathcal{F} \mathcal{M}_c$ abbildet. Dazu setzen wir

$$(68) \quad i_{\tilde{G}}(T) := T + (1 - G) \quad \text{für } T \in \tilde{G} \mathcal{M}_c \tilde{G}.$$

Es ist unmittelbar einsichtig, daß $i_{\tilde{G}}$ einen injektiven Homomorphismus von $\mathcal{F}(\tilde{G} \mathcal{M}_c \tilde{G})$ in $\mathcal{F} \mathcal{M}_c$ induziert. Also ist $i_{\tilde{G}} \Gamma(v^*) \circ \Gamma(\S 3.1)(\varphi)$ eine Reelle stetige Abbildung von X in $\mathcal{F} \mathcal{M}_c$. Die Homotopieklasse der Abbildung

$$(69) \quad i_{\tilde{G}} \Gamma(v^*) \circ \Gamma(\S 3.1) : X \longrightarrow \mathcal{F} \mathcal{M}_c$$

hängt nur von der Homotopieklasse von φ , und damit nur von dem Element $[\xi, \varphi] = \xi \in \text{Vect } R_{\mathcal{M}_c}(S^2 \times X)$, ab.

Falls X nicht zusammenhängend ist, so liefert die Einschränkung von ξ bzw. φ auf eine Zusammenhangskomponente von X wie oben eine Abbildung von dieser Zusammenhangskomponente in $\mathcal{F} \mathcal{M}_c$, deren Homotopieklasse nur von $[\xi, \varphi]$ abhängt. Also definiert $[\xi, \varphi]$ auch in diesem Fall eine Reelle stetige Abbildung von X in $\mathcal{F} \mathcal{M}_c$, die wir mit $A[\xi, \varphi]$ bezeichnen.

Kombinieren wir Δ mit dem Isomorphismus

Index: $[X, \mathcal{F}\mathcal{M}_c] \longrightarrow \text{KR}_{\mathcal{M}_c}(X)$, so erhalten wir eine Abbildung

$$(70) \quad \alpha := \text{Index} \circ \Delta : \text{Vect } R_{\mathcal{M}_c}(S^2 \times X) \longrightarrow \text{KR}_{\mathcal{M}_c}(X),$$

die definiert ist durch

$$(71) \quad \alpha([\xi, \varphi]) := \text{Index } \Delta_{[\xi, \varphi]}$$

Lemma 3.1.9 $\alpha : \text{Vect } R_{\mathcal{M}_c}(S^2 \times X) \longrightarrow \text{KR}_{\mathcal{M}_c}(X)$ ist ein Halbgruppenhomomorphismus.

Beweis: Seien ξ', η' Reelle $\mathcal{M}_c$ -Vektorbündel über $S^2 \times X$.

Nach Satz 2.2.2 können wir annehmen, daß ξ' bzw. η' Unterbündel von $X \times G_1'(\mathcal{H}_c)$ bzw. $X \times G_2'(\mathcal{H}_c)$ sind, wobei gilt

$$(72) \quad G_1' \sim G_2', \quad G_1' + G_2' = 1, \quad G_1' G_2' = 0.$$

Ist $\xi' = [\xi, \varphi]$ und $\eta' = [\eta, \psi]$, so gilt

$[\xi' \oplus \eta'] = [\xi \oplus \eta, \varphi \oplus \psi]$. Weiterhin gibt es reelle Projektionen $G_1 \leq G_1'$ und $G_2 \leq G_2'$ mit

$$(73) \quad H^2 \otimes \xi \cong X \times G_1(\mathcal{H}_c), \quad H^2 \otimes \eta \cong X \times G_2(\mathcal{H}_c).$$

φ bzw. ψ induzieren Reelle, stetige Abbildungen

$$(74) \quad T_1 : X \longrightarrow \mathcal{F}G_1 \mathcal{M}_c G_1, \quad T_2 : X \longrightarrow G_2 \mathcal{M}_c G_2$$

so daß gilt:

$$\alpha(\xi') = \text{Index}(T_1 + 1 - G_1), \quad \alpha(\eta') = \text{Index}(T_2 + 1 - G_2)$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Index } [\xi \oplus \eta, \varphi \oplus \psi] &= \text{Index}(T_1 + T_2 + 1 - (G_1 + G_2)) \\ &= \text{Index}(T_1 + (G_1' - G_1) + T_2 + (G_2' - G_2)) \\ &= \text{Index}((T_1 + 1 - G_1)(T_2 + 1 - G_2)) \\ &= \text{Index}(T_1 + 1 - G_1) + \text{Index}(T_2 + 1 - G_2) \end{aligned}$$

$$= \text{Index } \Delta [\xi, \varphi] + \text{Index } \Delta [\eta, \psi] ,$$

q.e.d.

Da $\text{KR}_{\mathcal{M}_\epsilon}(S^2 X \times X)$ universal bez. $\text{Vect } R_{\mathcal{M}_\epsilon}(S^2 X \times X)$ ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$(75) \quad \alpha : \text{KR}_{\mathcal{M}_\epsilon}(S^2 X \times X) \longrightarrow \text{KR}_{\mathcal{M}_\epsilon}(X),$$

für den

$$(76) \quad \alpha([\xi, \varphi]) = \text{Index } \Delta [\xi, \varphi] ,$$

$[\xi, \varphi] \in \text{Vect } R_{\mathcal{M}_\epsilon}(S^2 X \times X)$, gilt.

Im Kapitel II, § 3 haben wir gesehen, daß $\text{KR}_{\mathcal{M}_\epsilon}(S^2 X \times X)$ und $\text{KR}_{\mathcal{M}_\epsilon}(X)$ zweiseitige $\text{KR}(X)$ -Moduln sind. Wir zeigen nun, daß α ein $\text{KR}(X)$ -Modulhomomorphismus ist.

Lemma 3.1.10 $\alpha : \text{KR}_{\mathcal{M}_\epsilon}(S^2 X \times X) \rightarrow \text{KR}_{\mathcal{M}_\epsilon}(X)$ ist ein $\text{KR}(X)$ -Modulhomomorphismus.

Beweis: Sei $[\xi, \varphi] \in \text{Vect } R_{\mathcal{M}_\epsilon}(S^2 X \times X)$, $\eta \in \text{Vect } R(X)$ und sei $\pi : S^2 X \times X \rightarrow X$ die natürliche Projektion. Es reicht zu zeigen:

$$\alpha([\xi, \varphi] \otimes \pi^*(\eta)) = \alpha([\xi, \varphi]) \cdot [\eta]$$

Zunächst sieht man leicht, daß

$$(77) \quad 1 : S^1 X \times X \rightarrow X$$

$$(78) \quad 1(z, x) = 1_x \quad \text{für } (z, x) \in S^1 X \times X$$

die "clutching" Funktion von $\pi^*(\eta)$ ist. Also gilt

$$(79) \quad [\xi, \varphi] \otimes \pi^*(\eta) = [\xi \otimes \eta, \varphi \otimes 1]$$

Sei

$$(80) \quad T' : H^2 \oplus \xi \rightarrow H^2 \oplus \xi$$

der von φ induzierte Reelle $\mathcal{M}_\epsilon$ -Morphismus, dann induziert $\varphi \otimes 1$ den $\mathcal{M}_\epsilon$ -Morphismus

$$(81) \quad T' \otimes 1 : H^2 \otimes \xi \otimes \eta \longrightarrow H^2 \otimes \xi \otimes \eta$$

Sei $\tilde{G}$ eine reelle Projektion und

$$(82) \quad v' : H^2 \otimes \xi \longrightarrow X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)$$

eine Trivialisierung und sei

$$(83) \quad T := v' T' v'^*$$

Dann gilt

$$(84) \quad \alpha([\xi, \varphi]) = \text{Index}(T + 1 - \tilde{G}).$$

Ist

$$(85) \quad v : (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \otimes \eta \longrightarrow X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)$$

eine weitere Trivialisierung, so ergibt sich

$$(86) \quad \alpha([\xi \otimes \eta, \varphi \otimes 1]) = \text{Index}(v T \otimes 1 v^* + 1 - \tilde{G})$$

Wir geben nun eine solche Trivialisierung v an.

Seien ξ_1, ξ_2 Unterbündel von $X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)$ mit

$$(87) \quad \text{Index}(T + 1 - \tilde{G}) = [\xi_1]_{\mathcal{M}_c} - [\xi_2]_{\mathcal{M}_c}$$

und sei

$$(88) \quad v_1 : \xi_1 \otimes \eta \longrightarrow X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)$$

eine Einbettung. Nach Satz 2.2.7 gibt es einen Reellen $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus

$$(89) \quad v_2 : ((X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \ominus \xi_1) \otimes \eta \longrightarrow (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \ominus v_1(\xi_1 \otimes \eta)$$

Also ist

$$(90) \quad v := v_1 \oplus v_2 : (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \otimes \eta \longrightarrow X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)$$

ein Reeller $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus.

Nach Satz 2.4.7 gibt es Reelle $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismen

$$(91) \quad u_1 : X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c) \longrightarrow (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \ominus \xi_1$$

$$(92) \quad u_2 : X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c) \longrightarrow (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \ominus \xi_2,$$

so daß gilt

$$(93) \quad \text{Index}(u_1^* + 1 - \tilde{G}) = [\xi_1]_{\mathcal{M}_c}$$

und

$$\text{Index } (U_2 + 1 - \tilde{G}) = - [\xi_2]_{\mathcal{M}_c}.$$

Also ist T homotop zu $U_2 \circ U_1^*$. Aus der Konstruktion von V folgt sofort, daß

$$(94) \quad V \circ U_1 \otimes 1 \circ V^* : X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c) \rightarrow (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \otimes V_1(\xi_1 \otimes \eta)$$

ebenfalls ein Reeller $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus ist.

Es folgt

$$(95) \quad \text{Index } (V \circ U_1 \otimes 1 \circ V^* + 1 - \tilde{G}) = [\xi_1 \otimes \eta]_{\mathcal{M}_c}.$$

Analog hierzu gibt es einen Reellen $\mathcal{M}_c$ -Isomorphismus

$$(96) \quad W : (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \otimes \eta \rightarrow X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)$$

mit

$$(97) \quad \text{Index } (W \circ U_2 \otimes 1 \circ W^* + 1 - \tilde{G}) = [\xi_2 \otimes \eta]_{\mathcal{M}_c}.$$

Also gilt

$$(98) \quad \text{Index } (W \circ U_2 \otimes 1 \circ W^* \circ V \circ U_1 \otimes 1 \circ V^* + 1 - \tilde{G}) = [\xi_1 \otimes \eta]_{\mathcal{M}_c} - [\xi_2 \otimes \eta]_{\mathcal{M}_c}.$$

Da $\tilde{G}$ eigentlich unendlich ist, ist W homotop zu V und damit

$$(99) \quad W^* \circ V : (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \otimes \eta \rightarrow (X \times \tilde{G}(\mathcal{H}_c)) \otimes \eta$$

homotop zur Identität. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \text{Index } (W \circ U_2 \otimes 1 \circ W^* \circ V \circ U_1 \otimes 1 \circ V^* + 1 - \tilde{G}) &= \text{Index } (W \circ U_2 \circ U_1 \otimes 1 \circ V^* + 1 - \tilde{G}) \\ &= \text{Index } (W \circ T \otimes 1 \circ V^* + 1 - \tilde{G}) = \text{Index } (V \circ T \otimes 1 \circ V^* + 1 - \tilde{G}) \end{aligned}$$

q.e.d.

Sei nun für den Rest dieses Kapitels X ein lokalkompakter 2^0 abzählb., Reeller Raum und sei $\hat{X}$ die Einpunktkompaktifizierung von X . Dann sind $KR_{\mathcal{M}_c}(R^2 X \times X)$ bzw. $KR(R^2 X \times X)$ Untergruppen von $KR_{\mathcal{M}_c}(S^2 X \times \hat{X})$ bzw. $KR(S^2 X \times \hat{X})$. Die Einschränkung von α auf diese Untergruppen ergibt deshalb einen Homomorphismus

$$(100) \quad \alpha_X : KR_{\mathcal{M}_c}(R^2_X X) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_c}(X)$$

bzw.

$$(101) \quad \alpha_X : KR(R^2_X X) \longrightarrow KR(X).$$

Wir können deshalb die letzten Ergebnisse auch wie folgt zusammenfassen.

Lemma 3.1.11 Seien X, Y Reelle, 2^0 abzählbare, lokalkompakte Räume. Dann sind die folgenden beiden Diagramme kommutativ.

$$(D1) \quad \begin{array}{ccc} KR(R^2_X Y) \otimes KR_{\mathcal{M}_c}(X) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_c}(R^2_X Y \times X) \\ \downarrow \alpha_Y \otimes 1 & & \downarrow \alpha_{Y \times X} \\ KR(Y) \otimes KR_{\mathcal{M}_c}(X) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_c}(Y \times X) \end{array}$$

$$(D2) \quad \begin{array}{ccc} KR_{\mathcal{M}_c}(R^2_X X) \otimes KR(Y) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_c}(R^2_X X \times Y) \\ \downarrow \alpha_X \otimes 1 & & \downarrow \alpha_{X \times Y} \\ KR_{\mathcal{M}_c}(X) \otimes KR(Y) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_c}(X \times Y) \end{array}$$

wobei die horizontalen Abbildungen durch die äußere Multiplikation erklärt sind.

Beweis: Seien zunächst X und Y kompakt. Der Beweis folgt dann aus Lemma 3.1.9 bzw. 3.1.10. Als Nächstes erklären wir α für lokalkompakte Räume X, Y indem wir zur Einpunktkompaktifizierung übergehen; die Diagramme (D1) und (D2) bleiben dann kommutativ.

q.e.d.

Das triviale komplexe Linienbündel ξ über dem Einpunkt-
raum $\{x\}$ ist in natürlicher Weise ein Reelles Vektor-
bündel. Sei $\varphi_n(z) := z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$. φ_n ist
eine Reelle Abbildung; also ist $[\xi, \varphi_n]$ ein Reelles
Linienvektorbündel über S^2 . Wir definieren nun die
Bottklasse $b \in KR(S^2)$ durch

$$(102) \quad b := [\xi, \varphi_{-1}] - [\xi, \varphi_1]$$

b ist in der Untergruppe $KR(\mathbb{R}^2)$ von $KR(S^2)$ enthalten.
 α gibt nun zu einer Abbildung

$$(103) \quad \alpha_{\{x\}} : KR(\mathbb{R}^2) \rightarrow KR(\{x\}) = \mathbb{Z}$$

Anlaß.; dabei ist $\alpha_{\{x\}}([\xi, \varphi_n])$ gerade die negative
Windungszahl von φ_n [14]. Insbesondere gilt

$$\alpha_{\{x\}}(b) = 1 \in \mathbb{Z}.$$

Weiterhin definieren wir

$$(104) \quad \beta_X : KR_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}(X) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2 \times X)$$

indem wir das äußere Produkt von $b \in KR(\mathbb{R}^2)$

mit $[\xi]_{\mathcal{M}_\mathbb{C}} - [\eta]_{\mathcal{M}_\mathbb{C}} \in KR_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}(X)$ nehmen.

Wir können nun den Periodizitätssatz präzise formulieren.

Satz 3.1.12 Für jeden lokalkompakten, 2^0 abzählb., Reellen Raum

X sind die Homomorphismen

$$\beta_X : KR_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}(X) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2 \times X)$$

$$\alpha_X : KR_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2 \times X) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_\mathbb{C}}(X)$$

zueinander invers.

Beweis: Ersetzen wir in dem kommutativen Diagramm (D1) aus
Lemma 3.1.11 Y durch $\{x\}$, so erhalten wir das
kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 KR(R^2) \otimes KR_{\mathcal{M}_c}(X) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_c}(R^2 \times X) \\
 \downarrow \alpha_X \otimes 1 & & \downarrow \alpha_X \\
 \mathbb{Z} \otimes KR_{\mathcal{M}_c}(X) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_c}(X)
 \end{array}$$

Für $[\xi]_{\mathcal{M}_c} \in KR_{\mathcal{M}_c}(X)$ gilt deshalb:

$$(105) \quad \alpha_{X \times X}([\xi]_{\mathcal{M}_c}) = \alpha_X(b)[\xi]_{\mathcal{M}_c} = [\xi]_{\mathcal{M}_c}$$

Also ist

$$(106) \quad \alpha_{X \times X} = \text{id}_{KR_{\mathcal{M}_c}(X)}$$

Ersetzen wir in dem kommutativen Diagramm (D2) Y durch R^2 , so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 KR_{\mathcal{M}_c}(R^2 \times X) \otimes KR(R^2) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_c}(R^2 \times X \times R^2) \\
 \downarrow \alpha_X \otimes 1 & & \downarrow \alpha_{X \times R^2} \\
 KR_{\mathcal{M}_c}(X) \otimes KR(R^2) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_c}(X \times R^2)
 \end{array}$$

Also gilt für alle $u \in KR_{\mathcal{M}_c}(R^2 \times X)$

$$(107) \quad \alpha_{X \times R^2}(u.b) = (\alpha_X u).b$$

Wir definieren nun

$$(108) \quad \tau : R^2 \times X \times R^2 \longrightarrow R^2 \times X \times R^2$$

durch

$$(109) \quad \tau(r, x, s) = (-s, x, r) \quad (r, x, s) \in R^2 \times X \times R^2$$

und

$$\tau_t : R^2 \times X \times R^2 \longrightarrow R^2 \times X \times R^2$$

0 ≤ t ≤ 1, durch

$$\tau_t(r, x, s) = (r \cos \frac{\pi}{2} t - s \sin \frac{\pi}{2} t, x, r \sin \frac{\pi}{2} t + s \cos \frac{\pi}{2} t)$$

τ und τ_t , $0 \leq t \leq 1$, sind Reelle Abbildungen und es gilt

$$(111) \quad \tau_0(r, x, s) = (r, x, s)$$

$$(112) \quad \tau_1(r, x, s) = (-s, x, r) = \tau(r, x, s)$$

Also ist τ Reell homotop zur Identität. Weiterhin seien die Reellen Abbildungen

$$(113) \quad k : R^2 \times X \times R^2 \longrightarrow R^2 \times R^2 \times X$$

durch

$$(114) \quad k(r, x, s) = (s, r, x), \quad (r, x, s) \in R^2 \times X \times R^2$$

und

$$(115) \quad i : X \times R^2 \longrightarrow X \times R^2$$

durch

$$i(x, s) = (-s, x) \quad (x, s) \in X \times R^2$$

erklärt. Dann gilt für $u \in KR \mathcal{M}_d(R^2 \times X)$

$$\begin{aligned} (116) \quad \alpha_{X \times R^2}(u.b) &= \alpha_{X \times R^2}(\tau^*(u.b)) \\ &= \alpha_{X \times R^2}(\tau^*k^*(b.u)) \\ &= \alpha_{X \times R^2}(b.i^*(u)) \\ &= i^*(u) \end{aligned}$$

Definieren wir

$$(117) \quad j : R^2 \times X \longrightarrow X \times R^2$$

durch

$$(118) \quad j(r, x) = (x, r), \quad (r, x) \in R^2 \times X$$

so folgt mit (107)

$$\begin{aligned} \beta_X \alpha_X(u) &= b. \alpha_X(u) = j^*(\alpha_X(u).b) \\ &= j^* \alpha_{X \times R^2}(u.b) \end{aligned}$$

$$= j^* i^*(u)$$

$$= (i \circ j)^*(u).$$

Da $i \circ j : R^2_{\mathbb{R}} X \rightarrow R^2_{\mathbb{R}} X$ ein reeller Homöomorphismus ist, ist $(i \circ j)^* : KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(R^2_{\mathbb{R}} X) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(R^2_{\mathbb{R}} X)$ ein Isomorphismus. Weil β_x rechtsinvers zu α_x ist, muß $(i \circ j)^*$ der identische Isomorphismus sein; daher sind α_x und β_x zueinander invers.

q.e.d.

Im Unterschied zu dem in [9, Ch.4] angegebenen Periodizitätssatz ist R^2 bei uns ein reeller Raum. Die Involution von R^2 wird von der natürlichen Involution $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ induziert. Dies wird im Folgenden eine wesentliche Rolle spielen.

§ 2 Der Periodizitätssatz für reelle $\mathcal{M}$ -Vektorbündel

Sei $\mathcal{M}$ eine halbbendliche, eigentlich unendliche reelle von Neumann'sche Algebra, so daß $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ strikt rein Reell ist.

Sei X ein lokalkompakter, Reeller Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und $\hat{X}$ die Einpunktkompaktifizierung von X .

Zunächst erklären wir analog zu Atiyah [4] die Gruppen $KR^{p,q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

Wir können R auf zwei verschiedene Weisen zu einem Reellen Raum machen. Zum Einen können wir R mit der imaginären Achse $i R \subset \mathbb{C}$ identifizieren; R trägt dann die natürliche von $\mathbb{C}$ induzierte Involution

$$r \longmapsto -r, \quad r \in R$$

Zum Anderen können wir R mit der reellen Achse von $\mathbb{C}$ identifizieren; dann induziert $\mathbb{C}$ die identische Abbildung als Involution auf R .

Def. 3.2.1 Sei $R^{p,q} := R^q \oplus i R^p$, $B^{p,q}$ die Einheitskugel in $R^{p,q}$ und $S^{p,q}$ der Rand der Einheitskugel von $B^{p,q}$. Ist Y ein abgeschlossener Reeller Unterraum von X , so setzen wir

$$(1) \quad KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}^{p,q}(X) := \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}} (B^{p,q} / S^{p,q} \wedge \hat{X})$$

und

$$(2) \quad KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}^{p,q}(X, Y) := \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}} (B^{p,q} / S^{p,q} \wedge \hat{X} / \hat{Y})$$

Der Zusammenhang mit den KR -Gruppen in Kap. II § 3 ist dann durch

$$(3) \quad KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}^{-q}(X, Y) = \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}} (S^q \wedge \hat{X} / \hat{Y}) = \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}} (B^{0,q} / S^{0,q} \wedge \hat{X} / \hat{Y}) = KR_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}^{0,q}(X, Y)$$

gegeben. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (4) \quad KR_{\mathcal{M}_c}^{p,q}(X) &= \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c} \left(\frac{B^{p,q}}{S^{p,q}} \wedge \hat{X} \right) = \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c} (\hat{R}^{p,q} \wedge \hat{X}) = \\ &= \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c} (\widehat{R^{p,q}_X X}) = KR_{\mathcal{M}_c} (R^{p,q}_X X) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (5) \quad KR_{\mathcal{M}_c}^{p,q}(X, Y) &= \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c} \left(\frac{B^{p,q}}{S^{p,q}} \wedge \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} \right) \\ &= \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c} \left(\frac{B^{p,q} \wedge \hat{X}}{S^{p,q} \wedge \hat{Y}} \right) \\ &= \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c} \left(\frac{\widehat{R^{p,q}_X X}}{\widehat{R^{p,q}_Y Y}} \right) \\ &= \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c} (R^{p,q}_X X, R^{p,q}_Y Y) \end{aligned}$$

Falls X schon kompakt ist, so sei $\hat{X} = X \cup \{o\}$ die Vereinigung von X mit einem disjunkten Punkt.

Ist b das in § 1 definierte Bott'sche Element, so gilt nach Def. 3.2.1

$$(6) \quad b \in KR(R^{1,1}) = \widetilde{KR}(B^{1,1}/S^{1,1}) = KR^{1,1}(x_o)$$

wobei $\{x_o\}$ ein Einpunktraum ist. Die Multiplikation mit b induziert also einen Isomorphismus

$$(7) \quad \beta : KR_{\mathcal{M}_c}(X) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_c}(R^{1,1}_X X) = KR_{\mathcal{M}_c}^{1,1}(X).$$

Wir können deshalb den Periodizitätssatz neu formulieren.

Satz 3.2.2 Sei X ein Reeller, lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis. Dann induziert die Multiplikation mit $b \in KR^{1,1}(x_o)$ einen Isomorphismus

$$(8) \quad \beta : KR_{\mathcal{M}_c}(X) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_c}^{1,1}(X)$$

p -malige Multiplikation mit b induziert dementsprechend einen Isomorphismus

$$(9) \quad \beta^p : KR_{\mathcal{M}_E}(X) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_E}^{p,p}(X).$$

Wir identifizieren nun R^4 mit dem Schiefkörper der Quaternionen H . Die Abbildung

$$\mu : R^{0,4} \times X \times S^{4,0} \longrightarrow R^{4,0} \times X \times S^{4,0}$$

definiert durch

$$(10) \quad \mu(u, x, s) := (su, x, s), \quad (u, x, s) \in R^{0,4} \times X \times S^{4,0},$$

ist ein Reeller Homöomorphismus. Dabei ist su das Produkt von s und u in H . μ induziert also einen Isomorphismus

$$(11) \quad \mu^* : KR_{\mathcal{M}_E}^{4,4}(X \times S^{4,0}) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_E}^{-8}(X \times S^{4,0})$$

Verknüpfen wir μ^* mit der Abbildung β^4 , so erhalten wir einen Isomorphismus

$$(12) \quad \mu^* \beta^4 : KR_{\mathcal{M}_E}(X \times S^{4,0}) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_E}^{-8}(X \times S^{4,0})$$

Dies gilt insbesondere auch für die von Neumann'sche Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H}_E)$, d.h. es gibt einen Isomorphismus

$$(13) \quad \mu^* \beta^4 : KR(X \times S^{4,0}) \longrightarrow KR^{-8}(X \times S^{4,0})$$

Wir beschreiben nun

$$\mu^* \beta^4 : KR_{\mathcal{M}_E}(X \times S^{4,0}) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_E}^{-8}(X \times S^{4,0})$$

genauer.

Lemma 3.2.3 Sei $u \in KR_{\mathcal{M}_E}(X \times S^{4,0})$. Dann ist $\mu^* \beta^4(u)$ das Produkt von u mit $\mu^* \beta^4(1) \in KR^{-8}(S^{4,0})$, $1 \in KR(S^{4,0})$.

Beweis: Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 R^{0,4} \times R^{0,4} \times S^{4,0} & \xrightarrow{\mu_1} & R^{0,4} \times R^{4,0} \times S^{4,0} & \xrightarrow{\pi_5} & R^{0,4} \times R^{4,0} \\
 \uparrow \pi_4 & & & & \nearrow \pi_1 \\
 R^{0,4} \times R^{0,4} \times X \times S^{4,0} & \xrightarrow{2} & R^{0,4} \times R^{4,0} \times X \times S^{4,0} & & \\
 \downarrow \pi_3 & & \downarrow \pi_2 & & \\
 X \times S^{4,0} & \xrightarrow{\text{Id.}} & X \times S^{4,0} & &
 \end{array}$$

wobei π_i , $1 \leq i \leq 5$, die natürlichen Projektionen sind, und μ_1 bzw. μ_2 durch

$$(14) \quad \mu_1(r, u, s) = (r, su, s) \quad , \quad (r, u, s) \in R^{0,4} \times R^{0,4} \times S^{4,0}$$

bzw.

$$(15) \quad \mu_2(r, u, x, s) = (r, su, x, s)$$

gegeben sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \mu^* \beta^4(u) &= \mu^*(b^4 \cdot u) = \mu_2^*(\pi_1^*(b^4) \otimes \pi_2^*(u)) \\
 &= (\pi_1^* \mu_2^*)(b^4) \otimes (\pi_2^* \mu_2^*)(u) \\
 &= (\pi_5^* \mu_1^* \pi_4^*)(b^4) \otimes \pi_3^*(u) \\
 &= \pi_4^* \mu_1^* \pi_5^*(b^4) \otimes \pi_3^*(u) \\
 &= \mu_1^*(b^4 \cdot 1) \cdot u
 \end{aligned}$$

wobei $1 \in KR(S^{4,0})$ ist.

q.e.d.

Sei Y ein abgeschlossener reeller Unterraum von X . In Kap. II, § 3 haben wir gezeigt, daß es eine exakte Kohomologiesequenz

$$(17) \rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}^{-1}(\hat{X}) \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}^{-1}(\hat{Y}) \rightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(\hat{X}, \hat{Y}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(\hat{X}) \longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}(\hat{Y})$$

gibt. Nun gibt jede exakte Kohomologiesequenz eines Paares (X, Y) zu einer exakten Kohomologiesequenz eines Tripels (X, Y, Z) Anlaß [17, Th.10.2]. Nehmen wir das Tripel

$$(B^{p,0}_X \hat{X}, S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \hat{Y}, S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \{\infty\}), \quad p \in \mathbb{Z}^+, \text{ so}$$

erhalten wir die exakte Sequenz.

$$\longrightarrow \widetilde{KR}_{\mathcal{M}_c}^{-1}(B^{p,0}_X \hat{X}, S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \hat{Y}) \longrightarrow \\ KR_{\mathcal{M}_c}^{-1}(B^{p,0}_X \hat{X}, S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \{\infty\}) \longrightarrow \\ KR_{\mathcal{M}_c}^{-1}(S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \hat{Y}, S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \{\infty\}) \longrightarrow \\ KR_{\mathcal{M}_c}(B^{p,0}_X \hat{X}, S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \hat{Y}) \longrightarrow \\ KR_{\mathcal{M}_c}(B^{p,0}_X \hat{X}, S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \{\infty\}) \longrightarrow \\ KR_{\mathcal{M}_c}(S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \hat{Y}, S^{p,0}_X \hat{X} \cup B^{p,0}_X \{\infty\}).$$

Gemäß der Definition der Gruppe $KR^{p,q}$ können wir diese Sequenz auch umschreiben und erhalten die exakte Sequenz

$$(18) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_c}^{p,1}(X, Y) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_c}^{p,1}(X) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_c}^{p,1}(Y) \longrightarrow \\ KR_{\mathcal{M}_c}^{p,0}(X, Y) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_c}^{p,0}(X) \rightarrow KR_{\mathcal{M}_c}^{p,0}(Y).$$

Wir setzen nun

$$(19) \quad KR_{\mathcal{M}_c}^{p-q}(X) := \begin{cases} KR_{\mathcal{M}_c}^{p-q,0}(X) & p-q \geq 0 \\ KR_{\mathcal{M}_c}^{0,p-q}(X) & p-q \leq 0 \end{cases}$$

Dann ist γ , definiert durch $\gamma := \beta^q$ für $p-q \geq 0$ und $\gamma := \beta^p$ für $p-q \leq 0$, ein Isomorphismus von $KR_{\mathcal{M}_c}^{p-q}(X)$ auf $KR_{\mathcal{M}_c}^{p,q}(X)$

Sei

$$(20) \quad i : R^{0,1} \longrightarrow R^{1,1} = \emptyset$$

die natürliche Inklusion; dann ist $i^*(b) =: \eta$ ein Element von $KR(R^{0,1})$. Die p -malige Multiplikation mit η induziert deshalb einen Homomorphismus

$$\lambda : KR_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) \longrightarrow KR_{\mathbb{Z}}^{p,q+p}(X).$$

Wir beschränken uns nun auf den Fall $p = 4$.

Satz 3.2.4 Sei $\tau : S^{4,0}_X X \longrightarrow X$ die natürliche Projektion.

Dann ist die Sequenz

$$\longrightarrow KR_{\mathbb{Z}}^{4-q}(X) \xrightarrow{\gamma^{-1}\lambda} KR_{\mathbb{Z}}^{-q}(X) \xrightarrow{\pi^*} KR_{\mathbb{Z}}^{-q}(S^{4,0}_X X) \longrightarrow KR_{\mathbb{Z}}^{5-q}(X) \longrightarrow$$

exakt.

Beweis: Ersetzen wir in (18) X durch $B^{4,0}_X X$, Y durch $S^{4,0}_X X$ und beachten wir außerdem, daß

$$(21) \quad KR_{\mathbb{Z}}^{0,q}(B^{4,0}_X X, S^{4,0}_X X) = KR_{\mathbb{Z}}^{4,q}(X)$$

gilt, so erhalten wir die exakte Sequenz

$$\longrightarrow KR_{\mathbb{Z}}^{4,q}(X) \longrightarrow KR_{\mathbb{Z}}^{0,q}(B^{4,0}_X X) \longrightarrow KR_{\mathbb{Z}}^{0,q}(S^{4,0}_X X) \longrightarrow KR_{\mathbb{Z}}^{4,q-1}(X) \longrightarrow$$

Die natürliche Projektion von $B^{4,0}_X X$ auf X sei ebenfalls mit τ bezeichnet. Betrachte nun das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & KR_{\mathbb{Z}}^{4,q}(X) & \xrightarrow{j^*} & KR_{\mathbb{Z}}^{0,q}(B^{4,0}_X X) & \xrightarrow{i^*} & KR_{\mathbb{Z}}^{0,q}(S^{4,0}_X X) & \xrightarrow{\zeta} & KR_{\mathbb{Z}}^{4,q-1}(X) & \longrightarrow \\ & \uparrow \gamma & & \uparrow \tau^* & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \tau & \\ & \textcircled{1} & & \textcircled{2} & & \textcircled{3} & & & \\ \longrightarrow & KR_{\mathbb{Z}}^{4-q}(X) & \xrightarrow{\gamma^{-1}\lambda} & KR_{\mathbb{Z}}^{-q}(X) & \xrightarrow{\pi^*} & KR_{\mathbb{Z}}^{-q}(S^{4,0}_X X) & \xrightarrow{\gamma^{-1}\delta} & KR_{\mathbb{Z}}^{4-q+1}(X) & \longrightarrow \end{array}$$

Wir müssen zeigen, daß alle Fenster kommutativ sind.

③ ist trivialerweise kommutativ; ② ist kommutativ, weil das Diagramm von Abbildungen

$$(22) \quad \begin{array}{ccc} B^{4,0}_x X & \xleftarrow{1} & S^{4,0}_x X \\ \downarrow \pi & \nearrow \pi & \\ X & & \end{array}$$

kommutativ ist. Wir kommen nun zu ①.
Sei die Abbildung

$$(23) \quad s : X \longrightarrow B^{4,0}_x X$$

für $x \in X$ durch $s(x) := (o, x)$ gegeben. Dann sind s^* und π^* zueinander invers, weil $B^{4,0}$ Reell zusammenziehbar ist.

Also gilt $j^* \gamma = \pi^* \gamma^{-1} \chi \gamma$ genau dann, wenn $s^* j^* = \gamma^{-1} \chi$ richtig ist. Setzen wir abkürzend $i = j \circ s$, so bleibt zu zeigen,

$$(24) \quad \gamma i^* = \beta i^* = \chi$$

Betrachte nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} KR^{4,q}_x(X) & \xrightarrow{i^*} & KR^{-q}_x(X) \\ \beta^4 \downarrow & & \downarrow \beta^4 \\ KR^{8,q+4}_x & \xrightarrow{k^*} & KR^{4,4+q}_x(X) \end{array}$$

wobei k^* von der Abbildung

$$(25) \quad k : R^{0,4}_x R^{4,0}_x R^{0,q}_x X \longrightarrow R^{0,4}_x R^{4,0}_x R^{4,0}_x R^{0,q}_x X$$

$$(26) \quad k(r, s, t, x) := (r, s, o, t, x),$$

induziert wird. Betrachte nun das Diagramm

$$(27) \quad \begin{array}{ccc} R^{0,4}_x R^{4,0}_x R^{4,0}_x R^{0,q}_x X & & \\ \Theta \downarrow & \nearrow k & \\ R^{0,4}_x R^{4,0}_x R^{4,0}_x R^{0,q}_x X & \xleftarrow{k} & R^{0,4}_x R^{4,0}_x R^{0,q}_x X \end{array}$$

$\Theta(r, s, t, u, x) := (r, t, s, u, x)$, d.h. Θ vertauscht die beiden auftretenden $R^{4,0}$ Faktoren.

Weiterhin seien

$$\pi_1 : R^{0,4} \otimes R^{4,0} \otimes R^{4,0} \otimes R^{0,q} \otimes X \longrightarrow R^{0,4} \otimes R^{4,0}$$

$$\pi_2 : R^{0,4} \otimes R^{4,0} \otimes R^{4,0} \otimes R^{0,q} \otimes X \longrightarrow R^{4,0} \otimes R^{0,q} \otimes X$$

$$\pi_3 : R^{0,4} \otimes R^{4,0} \otimes R^{0,q} \otimes X \longrightarrow R^{4,0} \otimes R^{0,q} \otimes X$$

$$\pi_4 : R^{0,4} \otimes R^{4,0} \otimes R^{0,q} \otimes X \longrightarrow R^{0,4}$$

die natürlichen Projektionen und

$$i_1 : R^{0,4} \longrightarrow R^{0,4} \otimes R^{4,0}$$

die natürliche Inklusion. Aus dem Periodizitätssatz folgt, daß Θ^* der identische Isomorphismus ist. Also gilt für $u \in KR_{\mathcal{M}_e}^{4,q}(X)$

$$\begin{aligned} k^* \beta^4(u) &= k^*(\pi_1^*(b^4) \otimes \pi_2^*(u)) \\ &= k^* \Theta^*(\pi_1^*(b^4) \otimes \pi_2^*(u)) \\ (28) \quad &= (\pi_1 \circ \Theta \circ k)^*(b^4) \otimes (\pi_2 \circ k)^*(u) \\ &= \pi_4^* i_1^*(b^4) \otimes \pi_3^*(u) \\ &= i_1^*(b^4) \cdot u \\ &= \eta^4 \cdot u \end{aligned}$$

q.e.d.

Nach Atiyah [4, Lemma 3.7] ist $\eta^3 = 0$. Dieses beweist man mit Hilfe von Cliffordalgebren. Wir erhalten deshalb das folgende Corollar.

Corollar 3.2.5 Die Sequenz

$$(29) \quad 0 \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_e}^{-q}(X) \xrightarrow{\pi^*} KR_{\mathcal{M}_e}^{-q}(X \otimes S^{4,0}) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_e}^{5-q}(X) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.2.4

Seien A_k , die in [5] mit Hilfe der Clifford-algebren konstruierten Gruppen. Dann gibt es einen Homomorphismus

$$(30) \quad \alpha_k : A_k \longrightarrow KR^{-k}(x_0) = KR(R^{0,8})$$

A_8 besitzt ein erzeugendes Element λ . Sei

$\alpha(\lambda) \in KR^{-8}(x_0)$ das Bild von λ . Der Zusammenhang zwischen $\alpha(\lambda)$ und dem Element $\mu^* B^4(1) \in KR^{-8}(S^{4,0})$ wird durch das folgende Lemma geliefert.

Lemma 3.2.6 Sei $1 \in KR(S^{4,0})$ das Einselement. Dann gilt

$$\mu^* B^4(1) = \alpha(\lambda) \cdot 1 \in KR^{-8}(S^{4,0}).$$

Beweis: Dies ist ein Ergebnis von Atiyah [4, Lemma 3.9]

Satz 3.2.7 Seien $\lambda \in A_8$ und $\alpha(\lambda) \in KR^{-8}(x_0)$ wie oben. Dann induziert die Multiplikation mit $\alpha(\lambda)$ einen Isomorphismus

$$KR(X) \longrightarrow KR^{-8}(X)$$

Beweis: Multiplizieren wir die exakte Sequenz (29) mit $\alpha(\lambda)$ so erhalten wir ein kommutatives Diagramm von exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_e}^{-q}(X) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_e}^{-q}(X \times S^{4,0}) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_e}^{5-q}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \varphi_q \downarrow & & \psi_q \downarrow & & \varphi_{5-q} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_e}^{-q-8}(X) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_e}^{-q-8}(X \times S^{4,0}) & \longrightarrow & KR_{\mathcal{M}_e}^{-3-q}(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nach Lemma 3.2.6 stimmt ψ_q mit dem Isomorphismus

$$\mu^* B^4 : KR_{\mathcal{M}_e}^{-q}(X \times S^{4,0}) \longrightarrow KR_{\mathcal{M}_e}^{-q-8}(X \times S^{4,0})$$

überein. Weil ψ_q ein Isomorphismus ist, ist φ_q für alle $q \in \mathbb{Z}^+$ ein Monomorphismus. Also ist φ_{5-q} in dem obigen Diagramm ein Monomorphismus. Daraus folgt, daß φ_q ein Epimorphismus ist; also ist φ_q für alle q ein Isomorphismus.

q.e.d.

Wir betrachten nun den folgenden Spezialfall. Sei X ein lokalkompakter 2^0 abzählbarer Raum dessen Involution trivial ist, d.h. $\bar{x} = x$ für alle $x \in X$ und sei $KO_{\mathcal{M}}(X)$ die von reellen $\mathcal{M}$ -Vektorbündeln erzeugte Grothendieckgruppe (vergleiche Kap.II, §3); dann ist $KO_{\mathcal{M}}(\hat{X}) = KR_{\mathcal{M}}(\hat{X})$. Für diesen Fall können wir Satz 3.2.7 deshalb neu formulieren.

Satz 3.2.8 Sei X ein lokalkompakter 2^0 abzählbarer Raum und sei $\alpha(\lambda) \in KO^{-8}(x_0)$ wie in Satz 3.2.7. Dann induziert die Multiplikation mit $\alpha(\lambda)$ einen Isomorphismus

$$KO_{\mathcal{M}}(X) \longrightarrow KO_{\mathcal{M}}^{-8}(X) = KO_{\mathcal{M}}(R^8 x X)$$

q.e.d.

Literaturverzeichnis

1. M.F. Atiyah, K-theory, Benjamin, New York, 1967.
2. M.F. Atiyah, Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 19 (1968), 113 - 140.
3. M.F. Atiyah, Algebraic topology and operators in Hilbert space, Lectures in Modern Analysis and Applications. I, Springer, Berlin, 1969, 101 - 121.
4. M.F. Atiyah, K-theory and Reality, Quart. J. Math. Oxford 17 (1966), 367 - 386.
5. M.F. Atiyah, R.Bott, A.Shapiro, Clifford-Modules, Topology, Vol. 3 Suppl. 1 (1964), 3 - 38.
6. S. Berberian, Baer *-Rings, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1972.
7. M. Breuer, Fredholm theories in von Neumann Algebras I, Math. Ann. 178 (1968), 243 - 254.
8. M. Breuer, Fredholm theories in von Neumann Algebras II, Math. Ann. 180 (1969), 313 - 325.
9. M. Breuer, Theory of Fredholm operators and vector bundles relative to a von Neumann algebra, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 3 Nr. 3 (1973), 383 - 429.
10. J. Brüning, W. Willgerodt, Eine Verallgemeinerung eines Satzes von N. Kuiper, Math. Ann. 220 (1976), 47 - 58.
11. J. Brüning, Über Windungszahlen in endlichen W^* -Algebren und verwandte Fragen, Habilitationsschrift.
12. J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann), cahiers scientifiques, fasc. 25, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
13. A. Dold, Partitions of Unity in the theory of fibrations, Ann. of Math. (2) 78 (1963), 223-255.
14. R.G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York and London, 1972.
15. R.G. Douglas, R. Howe, On the C^* -Algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane, Trans. AMS 158 (1971), 203 - 217.
16. J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston.

Literaturverzeichnis

17. Eilenberg, Steenrod, Foundations of algebraic Topology, Princeton University Press, Princeton, 1952.
18. H. Holmann, Lineare und multilineare Algebra I, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970.
19. D. Husemoller, Fibre bundles, Mc Graw-Hill, New York, 1966.
20. K. Jänich, Vektorraumbündel und der Raum der Fredholmoperatoren. Math. Ann. 161 (1965) 129 - 142.
21. I. Kaplansky, Rings of Operators, Benjamin, New York, 1968.
22. S. Lang, Algebra, Addison - Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, 1971.
23. S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, Interscience, New York, 1967.
24. C. Rickart, General theory of Banach algebras, van Nostrand, Princeton, 1960.
25. F. Riesz, B. Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1973.
26. S. Sakai, C^* -Algebras and W^* -Algebras, Springer, Berlin, 1971.
27. G. Segal, Equivariant K-Theorie, I.H.E.S. 34 (1968), 129 - 150.
28. M. Takesaki, On the cross-norm of the direct product of C^* -algebras, Tohoku Math.J. (2) 16 (1964), 111 - 112.
29. N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, Princeton, 1951.
30. A. Wulfsohn, Produit tensoriel de C^* -algebras. Bull. Sci. Math. (2) 87 (1963), lière partie 13 - 27.
31. K. Yosida, Functional Analysis, Springer, Berlin, 1968.

LEBENS LAUF

Am 3.1.1948 wurde ich als Sohn des Arbeiters Erich Schreiber und seiner Ehefrau Erna, geb. Gerlach, in Berleburg geboren. Im Jahre 1954 wurde ich in die Volksschule von Niederlaasphe eingeschult und wechselte dann 1958 an das Gymnasium in Biedenkopf über. An dieser Schule blieb ich bis zum Abitur, das ich im Jahre 1966 ablegte. Am 3.1.1967 wurde ich zur Bundeswehr eingezogen, die ich am 30.6.1968 als Unteroffizier verließ. Zum Wintersemester 1968/69 begann ich dann mein Hochschulstudium am Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg. Im April 1974 bestand ich dort die Diplomhauptprüfung für das Fach Mathematik.

